

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2026.07.019

基于相场模型的准脆性材料的断裂统计研究

孙俊东¹, 丁兆东¹, 梁俊松², 陶明全¹

(1. 合肥工业大学 土木与水利工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 中国十九冶集团有限公司, 四川 成都 610031)

摘 要:在非均质材料损伤断裂过程中,材料内部的无序性是影响其力学性质的关键因素。混凝土作为一种在工程中被广泛使用的准脆性的非均质材料,其损伤断裂问题也被重点关注。文章在统一相场理论的框架下,运用非均质材料相场内聚裂缝模型,将相关性引入二维随机场建模,对二维非均质材料的断裂过程的特征量进行统计分析。结果表明:在断裂过程中,裂缝的起始、发展和最终断裂形态与微观无序性高度相关;材料内部的相关长度越小,随机场的均质度越大,固体的宏观抗拉强度就越强。通过定量分析发现,材料微观随机强度分布的相关长度对宏观抗拉强度的影响可以表示为 $f_t \sim l_c^{-1/2}$, 类似固体材料破坏的尺寸效应规律。该研究结果可为混凝土等非均质材料的断裂行为提供新的理论视角。

关键词:随机场;相场理论;非均质材料;断裂;无序性

中图分类号: TU375

文献标志码: A

文章编号: 1003-5060(2026)07-0987-10

Fracture statistics of quasi-brittle materials based on phase field model

SUN Jundong¹, DING Zhaodong¹, LIANG Junsong², TAO Mingquan¹

(1. School of Civil and Hydraulic Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. China 19th Metallurgical Group Co., Ltd., Chengdu 610031, China)

Abstract: The mechanical properties of heterogeneous materials are significantly influenced by internal disorder during the process of damage and fracture. Concrete, as a widely used quasi-brittle heterogeneous material in engineering, has garnered increased attention from researchers regarding its damage and fracture behavior. Under the framework of unified phase field theory with cohesive crack model of heterogeneous materials, this paper introduces correlation into two-dimensional random field modeling, and statistically analyzes the characteristic quantities of the fracture process of two-dimensional heterogeneous materials. The study reveals a strong correlation between the initiation, propagation, and final morphology of cracks and the microscopic disorder in the fracture process. It is observed that smaller correlation lengths and greater homogeneity of the random field lead to higher macroscopic tensile strength of the solid. Furthermore, quantitative analysis demonstrates that the influence of correlation length of microscopic random strength distribution on macroscopic tensile strength can be expressed as $f_t \sim l_c^{-1/2}$, similar to the size effect in failure of solid materials. The findings offer new insights into fracture behavior in heterogeneous materials like concrete.

Key words: random field; phase field theory; heterogeneous materials; fracture; disorder

混凝土作为一种广泛应用于建筑、基础设施和工程结构的重要材料,其性能对于工程的安全

性和耐久性具有至关重要的影响。然而,混凝土材料本身是一种非均质材料,其组成和结构在不

收稿日期:2024-01-09;修回日期:2024-04-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(52278302);中国中冶非钢领域重大研发资助项目(中冶科技[2023]5号)

作者简介:孙俊东(1997—),男,安徽铜陵人,合肥工业大学硕士生;

丁兆东(1986—),男,安徽无为,博士,合肥工业大学副教授,硕士生导师,通信作者, E-mail: dzd86@hfut.edu.cn.

同位置存在着微观上的不均匀性,导致了材料在受力过程中表现出复杂的断裂行为。虽然可以通过试验从宏观角度观察非均质固体的物理特性,但这些材料具有随机的力学性质(弹性模量、抗拉强度等),即使在确定性的外部作用下,对其破坏强度和行为的内在理解仍然不完善,有待进一步研究。非均质材料在微观层面上非常复杂,其非均质物质具有不同的形状、尺寸和物理性质,而正是这种成分与结构决定了其宏观特性和性能,使结构行为分析变得非常复杂。

针对非均质材料的断裂过程进行建模和预测,对于改进材料的性能和可靠性具有重要意义。文献[1]研究玻璃的断裂问题过程中提出了断裂力学的概念,但是无法对裂缝起裂、扩展及分叉等问题进行描述,因此无法求解复杂构型中的裂纹问题。为了克服上述问题,文献[2]提出了线弹性断裂能量变分原理,认为弹性能和裂缝表面能构成了弹性体的总势能,且实际裂缝的起裂、扩展和分叉都应该使得固体系统的总势能最小;文献[3]提出 AT2 相场断裂模型,在基于计算机图像分割中 Mumford-Shah 泛函^[4]的 Ambrosio-Yortorelli 椭圆形正则化方法^[5]的基础上,通过引入一个在 $[0,1]$ 区间内连续分布的辅助场变量,将尖锐裂缝弥散为具有一定尺度的裂缝带,其值在 0(完全损坏)和 1(完好无损)之间变化;文献[6]在热力学理论的框架内重新推导上述脆性断裂相场模型,对 AT2 模型进行完善,引入经典损伤力学中的能量拉-压分解^[7]、历史最大损伤能释放率^[8]等概念,并应用于固体结构的静力、动态和多场耦合破坏分析;文献[9]提出 AT1 脆性相场断裂模型,其破坏过程中的应力-应变曲线表现为理想弹脆性,且裂缝相场为有限分布,更加符合实际情况,从而解决了 AT2 相场模型达到峰值应力前存在缺乏线弹性段的问题;文献[10]利用相场断裂模型 AT2 来分析动态热-力耦合条件下的绝热剪切带。

为解决高精度地再现复杂裂缝演化导致的脆性和准脆性固体损伤破坏问题,文献[11]在热力学理论的框架下将损伤力学中的梯度损伤模型^[12]与断裂力学中的经典相场损伤模型^[13-14]有机结合,建立了同时适用于脆性和准脆性材料的统一相场理论。该理论引入了 2 个规范化的特征函数,裂缝几何函数和能量退化函数,分别表征固体破坏时的裂缝相场分布以及开裂后的应变能退化规律,更加符合实际情况,且经典的脆性断裂相

场模型 AT1/2 可作为该理论的特例给出。此外,在统一相场理论的基础上,还提出了相场正则化内聚裂缝模型^[15-16]。当裂缝尺度趋近 0 时,该模型能够准确预测常用的非线性软化曲线,如线性软化、指数软化、双曲型软化以及混凝土科内列森软化^[17]等。

为分析细观结构与宏观断裂现象之间的联系,深入理解混凝土损伤断裂的物理机制,本文着重探讨了空间相关性在非均质固体断裂过程中的作用和影响。通过在相场内聚裂缝模型中引入空间相关性随机场,本文能够描述材料内部的微观结构和缺陷分布。利用该模型,对二维非均质材料的断裂过程进行详细的分析,研究不同相关长度分布对断裂特征量的影响。通过研究和讨论不同相关长度尺寸对断裂损伤现象、应力-应变曲线、峰值应力的变化以及临界强度分布的影响,为非均质材料的断裂行为提供新的理论视角。

1 相场正则化内聚力模型

1.1 裂缝相场的正则化

首先考虑 1 个一维无限长杆 $\Omega = \Gamma \times L$, 假设横截面积为 Γ , 长度 $L \in (-\infty, +\infty)$ 。假设一维杆在 $X=0$ 处断裂, 且完全断裂的尖锐裂缝表面面积为 Γ 。杆件中这个尖锐的裂纹可以引入 1 个辅助场变量 $d(x) \in [0,1]$, 即裂缝相场, 其中: 当 $d=0$ 时, 代表完好无损状态; 当 $d=1$ 时, 表示截面完全断裂。

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

由于式(1)的阶跃函数存在突变, 不利于数值求解。在一维杆中, 进一步将 $d(x)$ 近似为连续函数, 将尖锐裂缝弥散为具有一定尺度的裂缝带, 并引入正则化参数 l , 用来表示裂纹弥散的宽度, 且满足裂缝带的宽度随 l 的减小而减小, 当 l 趋向于 0 时, 相场裂缝应收敛于尖锐裂缝。

在一维杆中, 可用下列微分方程在狄利克雷边界条件($d(0)=1, d(\pm D_0)=0$)下的解表示:

$$\alpha'(d) - 2l^2 d'' = 0 \quad (2)$$

通过积分方程的伽辽金弱形式, 可以得到泛函 $I(d)$:

$$I(d) = \frac{1}{c_0} \int_{\Omega} [\alpha(d) + l^2 (d')^2] dV \quad (3)$$

其中, $\alpha(d)$ 为裂缝几何函数, 是对裂缝相场的规范化拓扑, 可以表征裂缝密度函数 $\gamma(d; \nabla d)$, 且决定着缩放系数 c_0 的大小, c_0 反映空间相互作用

的大小,其值越小,材料越脆。

微分方程(2)可看作泛函 $I(d)$ 在区域上关于 $d(x)$ 的欧拉方程,其中 $d = \text{Arg}\{\inf_{d \in \Omega} I(d)\}$,表示其取下限时解。

令 $dV = \Gamma dx$,可近似地得到裂缝相场 $d(x) = d_u(x)$,其泛函为:

$$I(d = d_u) = l\Gamma \quad (4)$$

从上式可以看出,泛函 $I(d)$ 与裂缝表面面积 Γ 相关,最终得到一维杆的裂缝表面式为:

$$\Gamma(d) = \frac{I(d)}{l} = \frac{1}{c_0 l} \int_{\Omega} [\alpha(d) + l^2 (d')^2] dV \quad (5)$$

事实上,由于 $\Gamma(d)$ 等于裂纹面积,一维杆扩散后的裂缝是通过积分单位体积的裂缝密度函数来计算的,则裂缝密度函数为:

$$\gamma(d, d') = \frac{1}{c_0 l} [\alpha(d) + l^2 (d')^2] \quad (6)$$

考虑将上述一维杆的情况扩展到多维, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ($\delta \in \{1, 2, 3\}$),其外法向矢量记为 $\mathbf{n}$,外部边界为 $\partial\Omega$ 。假设 $\partial\Omega$ 分为力边界 $\partial\Omega_t$ 和位移边界 $\partial\Omega_u$ 两部分,且满足 $\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega$, $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \emptyset$ 。假设固体 Ω 内嵌裂缝 S ,相场模型将裂缝弥散为具有一定尺度 l 的裂缝带 B ,裂缝带的外边界及其法向矢量分量分别表示为 ∂B 和 $\mathbf{n}_B$ 。

多维情况下的裂缝密度函数可以由一维情况推广得到:

$$\gamma(d; \nabla d) = \frac{1}{c_0 l} (d^2 + l |\nabla d|^2) \quad (7)$$

其中: d 为裂缝相场; ∇d 为相场梯度算子。由狄利克雷边界条件 $W_d = \{d | d(x) = 1, x \in S\}$,根据最小化原则得到正则化裂缝相场:

$$d(x) = \text{Arg}\{\inf_{d \in W} I(d)\} \quad (8)$$

式(8)利用变分原理得到欧拉方程为:

$$\alpha'(d) - 2l^2 \Delta d = 0 \quad (9)$$

其中, $\Delta d = \nabla \cdot \nabla d$ 为相场的拉普拉斯运算符,将式(9)乘以 d' 然后对坐标 $\mathbf{x} = (x - x_s) \cdot \mathbf{n}_s$ 进行积分,其中 x_s 表示裂缝路径 S 上最近的点, $\mathbf{n}_s$ 表示尖锐裂缝法向矢量,可以得到:

$$\alpha(d) - l^2 |\nabla_n d|^2 = 0 \quad (10)$$

$$\gamma = \frac{2}{c_0 l} \alpha(d) \quad (11)$$

$$|\nabla_n d| = \frac{\partial d}{\partial |x_n|} = \frac{1}{l} \sqrt{\alpha(d)} \quad (12)$$

根据图像分割理论,可将裂缝面积表示为:

$$A_s = \int_S dA = \int_0^D \gamma(d; \nabla d) dA = A_d(d) \quad (13)$$

其中: A_s 为尖锐裂缝; A_d 为正则化裂缝。

令 $dV = 2d|x_n|A_s$,可得:

$$A_d = \int_B \gamma dV = \frac{4}{c_0} \int_0^{D_u} \alpha(d) \frac{1}{l} d |x_n| A_s \quad (14)$$

缩放系数 c_0 为:

$$c_0 = 4 \int_0^{D_u} \alpha(d) \frac{1}{l} d |x_n| = 4 \int_0^1 \sqrt{\alpha(\beta)} d\beta \quad (15)$$

1.2 裂缝几何函数与能量退化函数

为满足条件的裂缝几何函数的一般函数形式,在相场内聚裂缝模型中,参数 λ 取 2,缩放系数 c_0 取 2。

在文献[18]的基础上,统一相场理论考虑了应变能退化规律的一般形式为:

$$\omega(d) = \frac{(1-d)^p}{(1-d)^p + Q(d)} \phi(d) = \frac{Q(d)}{(1-d)^p} \phi(d) \quad (16)$$

其中, $\phi(d)$ 为单调递增函数。 $\phi(d)$ 应满足的条件为:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, \phi(1) = +\infty, \\ \phi'(d) &\geq 0, \phi'(1) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

连续函数 $Q(d)$ 可以近似为多项式,但一般只考虑其前 3 项:

$$Q(d) = a_1 d + a_2 d^2 + \dots = a_1 d P(d) \quad (18)$$

$$P(d) = 1 + a_2 d + a_3 d^2 + \dots \quad (19)$$

其中, $a_1 > 0, a_2, a_3, \dots$ 以及指数 $p > 0$ 均为模型参数。

在有限元隐式计算过程中,为避免结构发生完全断裂时,计算产生的刚度矩阵奇异性发生变化,一般会在能量退化函数中加上一个趋于 0 的正常数;而在显式计算过程中,因为其时间积分算法不需要对刚度矩阵求逆,所以不需要该参数。

在相场正则化内聚裂缝模型中, $Q(d)$ 模型参数 $p \geq 2$ 以保证 $Q(d)$ 严格为正,以及系数 a_i ($i = 1, 2, 3$) 均由材料参数推导而得:

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \frac{l_{ch}}{l} \quad (20)$$

$$a_2 = 2\beta_k^{2/3} - \left(p + \frac{1}{2}\right) \geq -\frac{1}{2} \quad (21)$$

$$a_3 = \begin{cases} 0, & p > 2; \\ \frac{1}{2} \beta_k^{2/3} - (1 + a_2), & p = 2 \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$\beta_k = \frac{k_0}{-\frac{1}{2} f_t^2 / G_c} \geq 1 \quad (23)$$

$$\beta_w = \frac{w_c}{2G_c/f_t} \quad (24)$$

其中: k_0 为初始刚度; w_c 为目标软化曲线 $\sigma(w)$ 得到的最终开裂位移。

根据文献[19], 在相场内聚裂缝模型中 a_1 与裂缝尺度参数有关, 但并非作为材料属性, 而是作为数值参数。

根据文献[20]的模拟, a_1 值越小, 裂缝面积的计算越精确, 满足 Γ 收敛性质; 此外, 随着 l 的减小, a_1 逐渐增大, 能量退化方程曲线变得陡峭, 故裂缝对固体周围的影响逐渐变小, 相场裂缝接近真实裂缝。

1.3 软化准则

根据裂缝几何函数和能量衰减函数, 上述相场正则化内聚力模型可以拟合各类软化准则, 如常用的线性软化准则、混凝土的科内列森软化准则、指数软化及双曲线软化准则在相场内聚裂缝模型中都可以得到较为精确的描述。

本文采用混凝土的科内列森软化曲线, 对应的 $p=2$ 、 $a_2=1.386\ 8$ 、 $a_3=0.656\ 7$, 相应的软化曲线 $\sigma(w)$ 为:

$$\sigma(w) = \exp(-\eta_2 r) - r(1.0 + \eta_1^3) \exp(-\eta_2) \quad (25)$$

$$k_0 = -1.354\ 6 \frac{f_t^2}{G_f}, w_c = 5.136\ 1 \frac{G_f}{f_t} \quad (26)$$

1.4 相关随机场理论及其实现方式

混凝土材料是一种非均质的多相复合准脆性材料, 其各组分分布具有一定的随机性。假定其内部细观材料抗拉强度符合文献[21]中的 Weibull 分布, 分布密度函数定义为:

$$f(u) = \frac{m}{u_0} \left(\frac{u}{u_0} \right)^{m-1} \exp\left(-\frac{u}{u_0}\right)^m \quad (27)$$

其中: u 为满足 Weibull 分布的参数的变量(本文为材料细观抗强度); m 为材料的均匀程度的形状参数或均质度; u_0 为尺度参数, 与均值 $E(u)$ 有关。

并且考虑强度分布的相关性, 相关函数表达式为:

$$R_{ff}(\xi_1, \xi_2) = \exp\left[-\left(\frac{\xi_1}{l_c}\right)^2 - \left(\frac{\xi_2}{l_c}\right)^2\right] \quad (28)$$

其中: ξ_1 、 ξ_2 分别为 x_1 、 x_2 方向的距离; l_c 为相关长度。

为生成具有上述相关性的 Weibull 分布随机场, 采用傅里叶滤波变换法(Fourier filtering method, FFM)并加以一定的改进。步骤可归纳为: ① 假设所需的相关函数(C_r)和网格的大小为

$L=2^n$, 其中 n 为整数; ② 用离散傅里叶变换对 C_r 进行变换获得功率谱函数 S_k , 对于 $S_k < 0$ 的值, 令 $S_k = 0$; ③ 通过 S_k 得波数 k -空间中的复数随机变量 $\Phi_k^{\text{Re/Im}} = \sqrt{S_k} U$, 其中 U 为高斯随机变量; ④ 利用离散傅里叶逆变换将 Φ_k 从波数空间(k -空间)变换到实空间(x -空间), 得到两组独立的空间相关高斯变量; ⑤ 生成指定的 Weibull 分布随机序列 τ_x , 此序列不具备目标空间相关性; ⑥ 将 τ_x 的相对空间位置按照 φ_x 相同的升序或降序重新排列, 得到所需具有目标空间相关性的 Weibull 分布随机场。

相关随机场实现流程如图 1 所示。

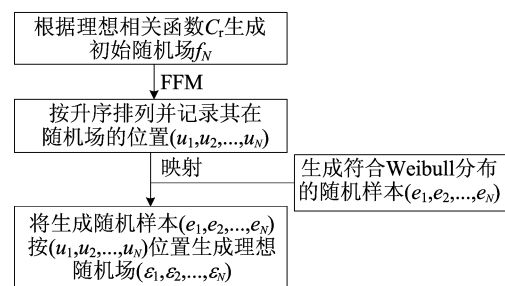


图 1 相关随机场生成流程图

2 数值模拟

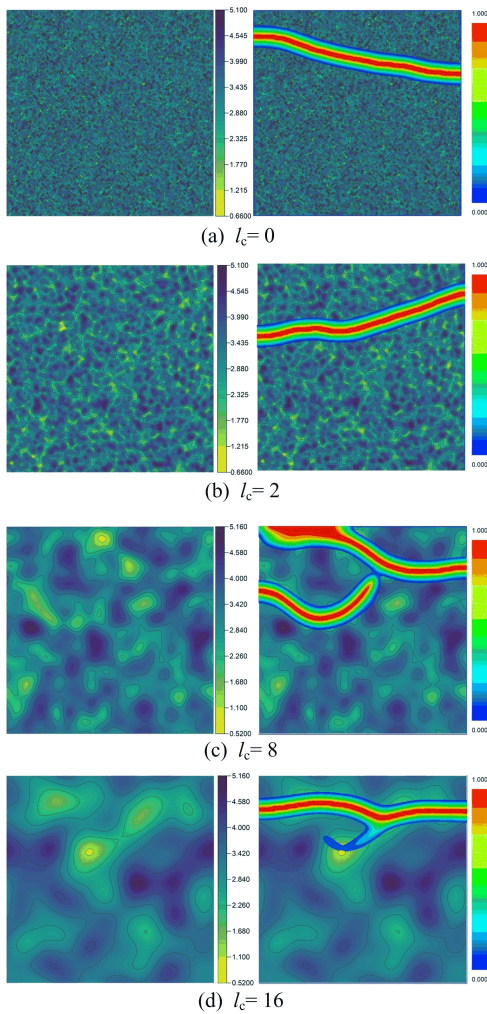
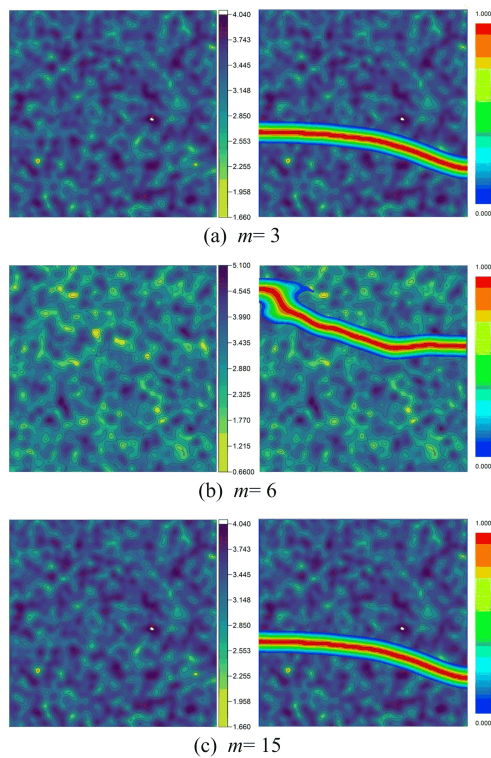
本文采用相场内聚裂缝模型对单轴受拉情况下的损伤断裂情况进行模拟统计分析。模拟采用的样本模型参数为正方形边长 $D=50\text{ mm}$ 的示例样本, 划分单元数为 128×128 。其材料参数为: 断裂能 $G_f=0.15\text{ N/mm}^2$, 泊松比为 0.2, 恒定弹性模量 E 取 25 GPa 。

在 Weibull 分布的抗拉强度随机场中, 取 u_0 为 3.5 MPa , 均质度 m 分别取 3、6、15, 相关长度 l_c 的取值分别为 2、4、8、16。生成 100 个随机样本进行模拟, 以确保结果在统计学上收敛; 本文共生成 1 800 个样本。

具有不同相关长度和无序性的随机场模型的受拉破坏模式分别如图 2、图 3 所示。

图 2、图 3 中: 左侧边为材料单元的抗拉强度分布云图; 右侧是在原图上叠加了最终破坏后损伤相场云图, 左、右侧图分别示意了裂纹的扩展路径和最终分布。

其中, 主裂纹路径通过低抗拉强度的薄弱区域如图 2c、图 2d、图 3 所示。裂纹途中被高抗拉强度区域阻挡, 转而向其他区域发展, 从而导致迂回的裂纹路径和更多的微裂纹。

图 2 $m=6$ 时不同相关长度的随机场模型的裂缝云图图 3 $l_c=4$ 时不同无序性的随机场模型的裂缝云图

$m=6$ 、 $l_c=4$ 时的典型模型的损伤断裂过程如图 4 所示。图 4 展示了拉伸过程中弹性阶段、峰值应力、软化及破坏前的裂纹形态。在拉伸起始阶段,微裂纹就开始出现,并在许多低抗拉强度区域逐渐发展,表现出典型的准脆性固体的破坏特征^[22-23],有效模拟微观破坏演变过程。

进一步加载拉伸作用后,在峰值载荷下仍没有明显的主导裂纹;直到峰值后进入软化阶段,微裂纹继续演化、扩展,最后凝聚成 1~2 个局部的主导裂纹,而大多数微裂纹没有继续延伸下去;最终模型以粗糙的裂纹轨迹破坏。裂纹的起始、发展和最终形态与抗拉强度的随机分布有很大关系(图 4c)。

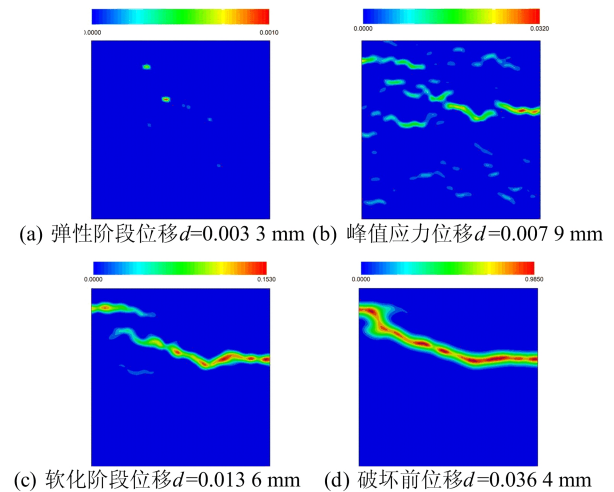


图 4 单轴拉伸作用下的随机场模型的损伤演变过程

Weibull 随机场生成的均质度($m=6$)、相关长度 $l_c=0$ 的 100 个模型样本在单轴拉伸作用下的损伤破坏过程中的应力-位移曲线及应力平均值曲线如图 5 所示。对于弹性阶段的结果分析仅需要少量数据即可得出,而对于损伤软化阶段的分析结果需要大量随机场模拟的数据才可以得出其在统计学上的结论^[24]。

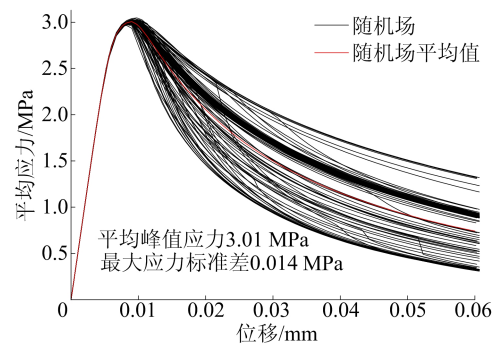


图 5 100 个随机场模型的应力-位移曲线及其平均值曲线

对比 3 种不同裂缝尺度参数 l (0.390、0.975、1.950 mm) 的断裂时相应的裂纹破坏模式, 如图 6 所示, 断裂过程相应的应力-应变曲线如图 7

所示。从图 6、图 7 可以看出, 单轴受拉破坏时的峰值应力和裂纹路径都对 l 不敏感, l 只对裂纹带宽产生微小影响。

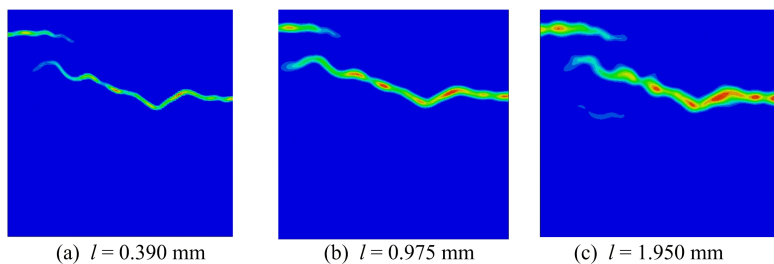


图 6 不同裂缝尺度的裂纹云图

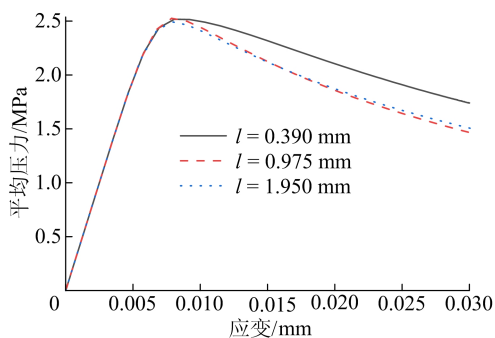


图 7 裂缝尺度参数对应力-应变曲线的影响

以相关长度 $l_c=0$ 和均质度 $m=6$ 的模型样本数量对抗拉强度的平均值、标准差和变异系数的影响如图 8 所示。

由图 8 可知, 100 个样本数量足以在统计学上达到收敛目的。

峰值应力的概率密度函数及具有样本均值和标准差的正态分布如图 9 所示。峰值应力的累积分布函数与正态分布的情况十分相似, 如图 10 所示。

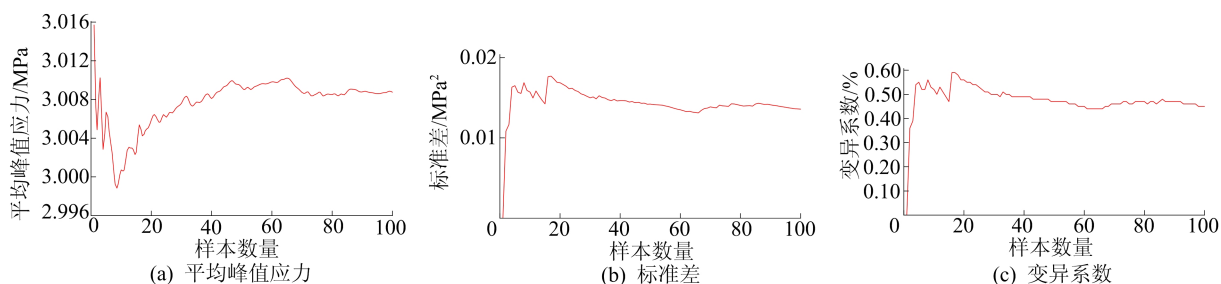


图 8 样本数量对评价参数的影响

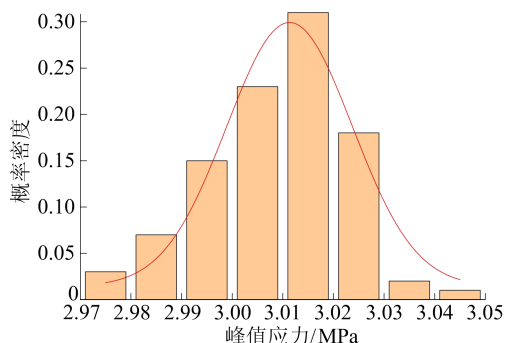


图 9 峰值应力的概率分布函数

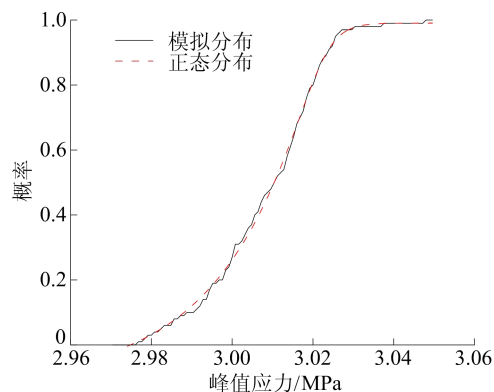


图 10 峰值应力的累积分布函数

3 相关长度和无序性的影响

l_c 分别为 0、2、4、8、16, $m=3$ 的单轴受拉损

伤破坏的裂纹图如图 2、图 3 所示。

由图 2、图 3 可知, 破坏发生的起始、发展和最终形态与材料内部局部区域的抗拉强度强弱有关。

微裂纹从荷载作用起始就开始出现,在多处低抗拉强度区域出现并发展。随着荷载作用增加,多处微裂纹逐渐演化并最终聚合成 1~2 个局部的大裂纹而发生破坏。其余微裂缝由于局部的主导裂缝产生应力集中现象并未继续发展,最终导致模拟可视

化尺度几乎不可见。无序性较大时,材料发生破坏时形成的最终裂缝路径更加曲折;另外,相关长度愈大,破坏形成的裂纹路径愈加平滑。当 $m=6$ 时,不同相关长度的模型平均峰值应力、标准差和变异系数的变化如图 11 所示。

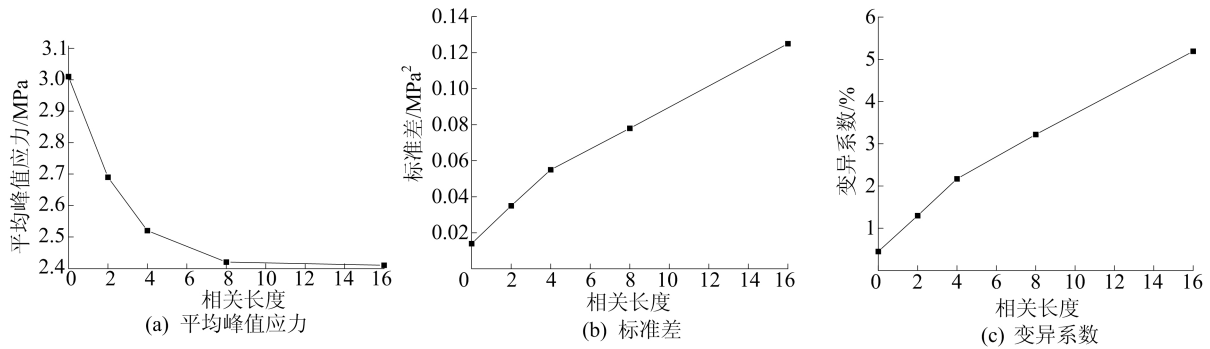


图 11 不同相关长度对评价参数的影响

从图 11 可以看出,平均峰值应力随着材料内部相关长度的增加而减小,并且下降率也逐渐减小;从尺寸为 50 mm、网格数量为 128×128 的模型可以看出,当相关长度达到 8 后,平均峰值应力逐渐减小到平稳水平。此外,相关长度较大的模型具有较大的标准差和变异系数,说明其具有较大的离散性。

本文采用的所有模型参数为计算的抗拉强度(峰值应力)的平均值、标准差和变异系数。相关

长度相同、均质度不同的随机场样本的模型参数见表 1 所列,均质度较小的样本计算峰值应力的均值较小,但其标准差和变异系数较大,即材料内部相关长度相同,均质度较小的样本更容易发生破坏。对于均质度相同、相关长度不同的随机场样本,计算抗拉强度的标准差和变异系数都随相关长度的增加而增加,而平均值随着相关长度的增加反而减小,说明相关性强的随机场模型在单轴受拉的条件下更容易破坏。

表 1 抗拉强度的模拟结果

相关长度	$m=6$					$m=3$			$m=15$		
	0	2	4	8	16	0	4	16	0	4	16
平均值/MPa	3.01	2.69	2.52	2.42	2.41	2.63	1.97	1.86	3.27	3.07	2.98
标准差/MPa²	0.014	0.035	0.055	0.078	0.125	0.033	0.091	0.154	0.025	0.034	0.054
变异系数/%	0.45	1.30	2.17	3.22	5.19	1.24	4.74	8.29	1.07	1.10	1.82

比较在保持随机场无序性一致的情况下, $m=6$ 时具有不同相关长度模型的平均应力-应变曲线如图 12 所示。由图 12 可知,强度(即平均峰值应力)随相关长度的增加而降低,同时可以看到相关长度为 0 时,平均应力-应变曲线自弹性阶段与其余曲线有明显区别,这可能是由于 Weibull 函数生成的抗拉强度随机场相对于引入相关性的随机场来说,模型整体内部力学性质更加均匀,其初始刚度更大,相较于相关随机场不容易产生损伤。此外可发现随着相关长度的增加,结构产生峰值应力前的非线性部分逐渐变得不明显,且与峰值应力相对应的应变逐渐减小,结构会更早发生破坏,脆性变大。

最终峰值应力对应的在 $l_c=8$ 时收敛,此时

材料内部的空间相关性对其损伤破坏的影响不再占据主导作用。

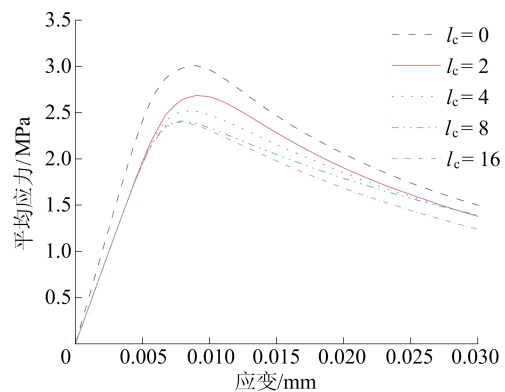


图 12 不同相关长度随机场模型的平均应力-应变曲线

在空间相关性不变的情况下,具有不同随机场均质度(初始刚度不同)模型的平均应力-应变曲线如图 13 所示。

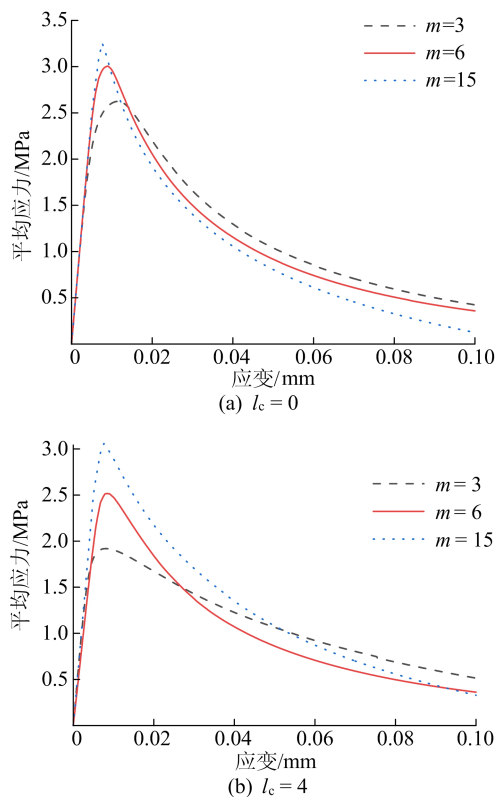


图 13 不同均质度随机场模型的平均应力-应变曲线

由图 13 可知,模型的平均应力随无序性增加而减小,这表明材料均质度较小的模型包含更多的缺陷,故更容易发生破坏。另外,峰值强度后软化部分的斜率随着无序性的增加而变缓,说明无序性小的模型脆性较大。

统计不同相关长度随机场模型的最后破坏单元个数如图 14 所示。

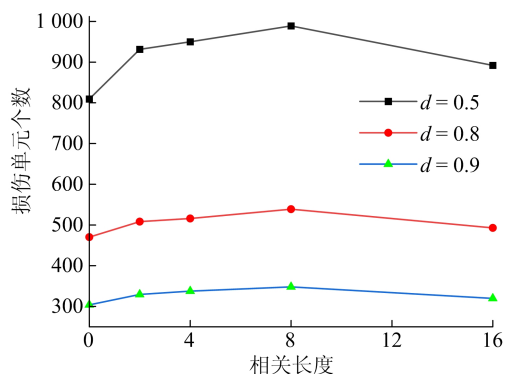


图 14 不同相关长度随机场模型的最后破坏单元个数

空间相关性不同的随机场模型破坏云图如图 15 所示。本文统计了模型最后破坏时每个单

元的损伤变量 d 大于 0.5、0.8、0.9 的分布情况,用以描述最终裂缝分布,其中损伤变量 $d > 0.9$ 表示最终裂缝分布,微裂纹用 $0 < d \leq 0.9$ 表示。

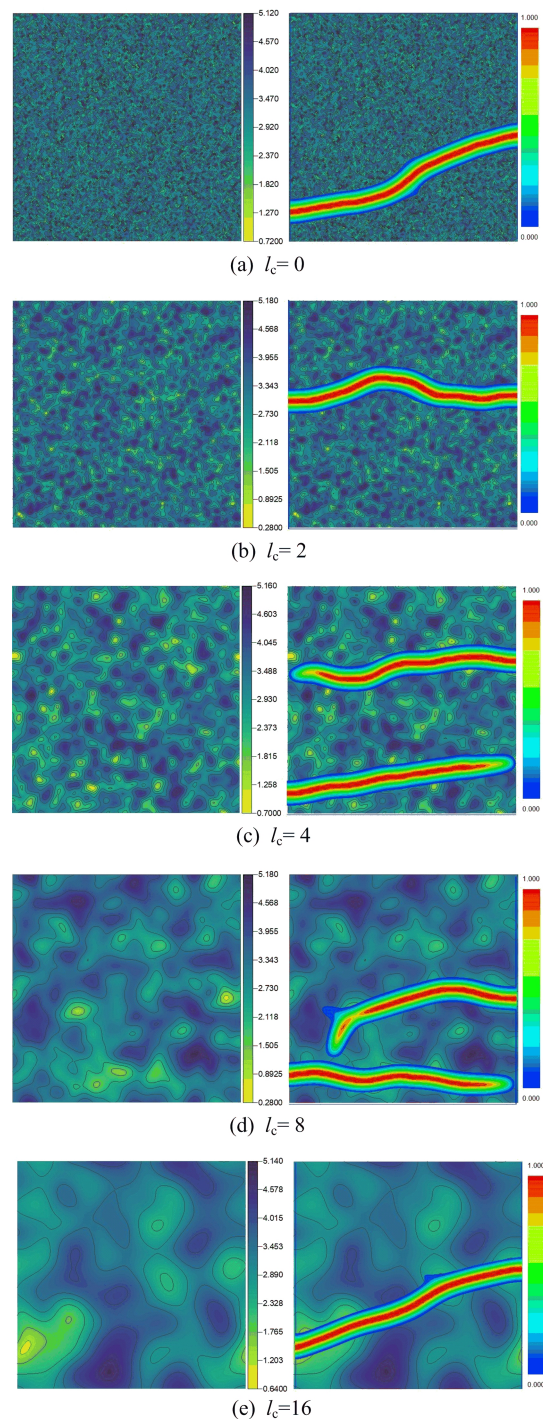


图 15 不同空间相关性的随机场模型破坏云图

相场内聚力模型最后破坏时,最终裂缝周围还存在一些损伤情况,如图 2、图 3、图 15 所示,这是由相场模型将尖锐裂缝弥散为具有一定宽度的裂缝带导致的,随着损伤值逐渐增加,损伤单元的个数逐渐减小,裂缝逐渐收敛为尖锐裂缝。

4 材料相关长度的尺寸效应

单轴拉伸下的模型在达到峰值强度之前就会出现稳定的裂缝演化区,因此作为最弱链理论基础的并联和串联模型不再适用,由固体内部能量释放引起的应力重分布效应代替 Weibull 随机场无序分布尺寸效应,占据断裂过程中的主导因素。另外,Weibull 理论忽略了本文所采用的基于非局部理论的相场内聚裂缝模型引入的材料内部的空间相关性,故考虑相关长度作为材料内部聚合物尺寸对抗拉强度的影响。将模拟所得数据与文献[25]尺寸效应进行比较,可获得材料抗拉强度与材料内部相关长度之间的表达式为:

$$f_t = \frac{Bf_t'}{\sqrt{1 + \frac{l_c}{l_0}}} \quad (29)$$

其中: f_t 为混凝土的名义强度; l_c 为长度的大小; l_0 为模型网格尺寸,取 128; f_t' 为混凝土模型的抗拉强度的均值。参数 B 可根据式(29)计算得出,结果见表 2 所列。

表 2 不同相关长度参数 B

l_c	0	2	4	8	16
B	1.163	1.311	1.410	1.491	1.540

根据相关性的尺寸效应律,不同相关长度 l_c 的 $\ln(f_t/(Bf_t'))$ 与 $\ln(l_c/l_0)$ 的双对数散点图及其数据以最小二乘法拟合的直线如图 16 所示,其中相关系数 $R^2 > 0.87$ 。

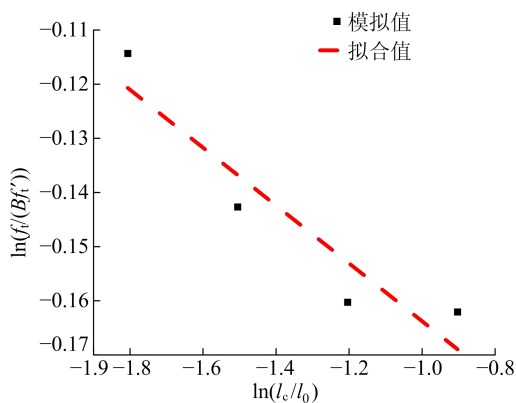


图 16 不同相关长度的混凝土抗拉强度的相关长度尺寸效应

由图 16 可知,拟合的点与拟合的直线基本接近下降,但下降的斜率逐渐变缓,表明破坏应力的相关长度尺寸效应逐渐下降。

5 结 论

1) 在单轴拉伸的情况下模拟得到了准脆性

材料的相关随机相场内聚裂缝模型结果,在断裂过程中,裂缝的起始、发展和最终断裂形态与抗拉强度在统计学上的无序性高度相关。

2) 通过对模拟的平均结果进行曲线拟合,材料内部的相关长度越小,随机场的均质度越大,固体的抗拉强度就越强。模型整体断裂过程中的应力-应变关系,峰值应力的均值、标准差及变异系数与脆性本构模型类似,均与相关长度呈现相关性,峰值应力所对应的应变也随着空间相关性的增加而逐渐减小。

[参 考 文 献]

- [1] Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 1921, 221 (582/583/584/585/586/587/588/589/590/591/592/593):163-198.
- [2] Francfort G A, Marigo J J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1998, 46:1319-1342.
- [3] Bourdin B, Francfort G A, Marigo J J. Numerical experiments in revisited brittle fracture[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48(4):797-826.
- [4] Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42:577-685.
- [5] Ambrosio L, Tortorelli V M. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1990, 43(8):999-1036.
- [6] Miehe C, Welschinger F, Hofacker M. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: variational principles and multi-field FE implementations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 83(10):1273-1311.
- [7] Wu J Y, Xu S L. Reconsideration on the elastic damage/degradation theory for the modeling of microcrack closure-reopening (MCR) effects[J]. International Journal of Solids and Structures, 2013, 50:795-805.
- [8] Simo J C, Ju J W. Strain- and stress-based continuum damage models: I. Formulation[J]. International Journal of Solids and Structures, 1987, 23:821-840.
- [9] Pham K, Amor H, Marigo J J, et al. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture[J]. International Journal of Damage Mechanics, 2011, 20(4):618-652.
- [10] Tian F C, Tang X L, Xu T Y, et al. A hybrid adaptive finite element phasefield method for quasi-static and dynamic brittle fracture [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2019, 120:1108-1125.
- [11] Wu J Y. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure[J]. Journal of the Me-

- chanics and Physics of Solids, 2017, 103: 72-99.
- [12] Chu D Y, Li X, Liu Z L, et al. A unified phase field damage model for modeling the brittle-ductile dynamic failure mode transition in metals[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2019, 212: 197-209.
- [13] Bourdin B, Francfort G A, Marigo J J. The variational approach to fracture[J]. Journal of Elasticity, 2008, 91(1): 5-148.
- [14] Kuhn C, Schlüter A, Müller R. On degradation functions in phase field fracture models[J]. Computational Materials Science, 2015, 108: 374-384.
- [15] Wu J Y. Geometrically regularized gradient-damage model with energetic equivalence[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 328: 612-637.
- [16] Wu J Y, Nguyen V P. A length scale insensitive phase-field damage model for brittle fracture[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2018, 119: 20-42.
- [17] Cornelissen H, Hordijk D, Reinhardt H. Experimental determination of crack softening characteristics of normal-weight and lightweight concrete[J]. Heron, 1986, 31(2): 45-56.
- [18] Lorentz E, Godard V. Gradient damage models: toward full-scale computations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(21/22): 1927-1944.
- [19] 吴建营, 洪屹峰. 基于统一相场理论的锂电池电极颗粒断裂模拟研究[J]. 力学学报, 2022, 54(9): 2472-2488.
- [20] Wu J Y, Nguyen V P, Nguyen C T. Advances in applied mechanics[M]. [S. l.]: Elsevier, 2020: 1-183.
- [21] Weibull W. A statistical theory of the strength of materials[J]. Proceeding of the American Mathematical Society, 1939, 15(1): 1.
- [22] Feng X Q, Qin Q H, Yu S W. Quasi-micromechanical damage model for brittle solids with interacting microcracks[J]. Mech Mater, 2004, 36(3): 261-273.
- [23] Wang Z M, Huang Y J, Yang Z J, et al. Efficient meso-scale homogenisation and statistical size effect analysis of concrete modelled by scaled boundary finite element polygons[J]. Constr Build Mater, 2017, 151: 449-463.
- [24] Wang X F, Yang Z J, Yates J R, et al. Monte Carlo simulations of mesoscale fracture modelling of concrete with random aggregates and pores[J]. Constr Build Mater, 2015, 75: 35-45.
- [25] Bazant Z P, Planas J. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials[M]. Boston: CRC Press, 2019: 1-560.

(责任编辑 吴 亮)

(上接第 986 页)

供较充足的氧气,基本实现溶解氧质量浓度达到 15 mg/L 以上,且 pH 值稳定在 8.5 左右;在缓释氧材料促进作用下氨氮的去除率超过 90%。

反硝化细菌利用碳氮比为 2.5 的乙醇作为碳源可以有效促进反硝化作用,在水力负荷和硝酸盐负荷波动情况下,模拟的傍河区地下水硝酸盐质量浓度基本不高于 3 mg/L,去除率不低于 91%,表明本次设计模拟傍河区地下水氮污染的矩形槽修复系统可以承载一定的污染负荷和水力负荷,系统修复效果较稳定。

本文侧重于室内槽试验模拟傍河地表水与地下水的水力联系,提出梯级修复傍河区地下水氮污染的方法,实际应用过程中,应重点考虑傍河区地表水与地下水间的水流交换速度、缓释氧材料的释氧速率及是否有其他污染源排入等因素的约束,另外,微生物的活性对温度较敏感,建议挂膜阶段避开气温高于 35℃和低于 5℃左右的天气。

在汛期、枯水期地表水水位波动影响下,地表水与地下水的补排关系发生变化,受篇幅限制,本次重点探讨了地表水补给地下水的过程,地下水排泄到地表水的过程是一个相反的过程,该过程的去除效果是否完全相同,将是下一步需继续开展试验与数值模拟的重点内容。

[参 考 文 献]

- [1] 于文龙,樊康康. 傍河地下水源地水文地质特征及水资源量评价[J]. 水科学与工程, 2021(5): 22-24.
- [2] 闫雅妮,马腾,张俊文,等. 地下水与地表水相互作用下硝态氮的迁移转化实验[J]. 地球科学, 2017, 42(5): 783-792.
- [3] 刘佩贵,曾康辉,尚漫廷,等. 复合井修复地下水硝酸盐污染的效果[J]. 农业工程学报, 2021, 37(6): 214-219.
- [4] 刘佩贵,潘继隆,尚漫廷,等. CaO₂ 缓释氧材料去除地下水氨氮的效能研究[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2023, 46(8): 1018-1023.
- [5] Liu P G, Liu M C, Shang M T, et al. Horizontal well test for simulating the in situ remediation of nitrate contaminated groundwater by microbial denitrification[J]. Water Air Soil Pollut, 2019, 230: 189.
- [6] 孔祥科. 复合介质渗透反应格栅去除地下水中氨氮的柱实验研究[D]. 北京:中国地质大学(北京), 2012: 30-46.
- [7] 王曼曼,汪家权,褚华男. 固态碳源去除地下水硝酸盐的模拟实验[J]. 环境工程学报, 2013, 7(2): 501-506.
- [8] Abu-Ghararah Z H. Biological denitrification of high nitrate water, influence of type of carbon source and nitrate loading[J]. Journal of Environmental Science and Health, Part A, Environmental Science and Engineering, 1996, 31(7): 1651-1668.

(责任编辑 吴 亮)