

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2025.08.015

基于同伦临近映射算法的低秩矩阵恢复

班书宇, 黄尉

(合肥工业大学 数学学院, 安徽 合肥 230601)

摘要:文章提出的同伦临近映射(homotopy proximity mapping, HPM)算法可用于从信号的(噪声)线性测量中重建低秩信号或从观测数据中学习低秩线性模型。该算法在每次迭代时采用核范数的简单临近映射,并逐渐减小核范数的正则化参数。结果表明,HPM 算法可在有噪测量下进行低秩矩阵恢复,且恢复结果表现为全局线性收敛。此外,更大的观测值可使 HPM 算法恢复更准确、收敛更快。

关键词:压缩感知;矩阵恢复;同伦临近映射(HPM);线性收敛

中图分类号:O174.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2025)08-1106-06

Low-rank matrix recovery based on homotopy proximity mapping algorithm

BAN Shuyu, HUANG Wei

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230601, China)

Abstract:In this paper, a homotopy proximity mapping(HPM) algorithm is proposed to reconstruct low-rank signals from noisy linear measurements of signals or to learn low-rank linear models from observed data. The algorithm adopts a simple proximity mapping of the kernel norm during each iteration, and gradually reduces the regularization parameters of the kernel norm. The experimental results show that HPM algorithm can perform low-rank matrix recovery under noisy measurements, and the recovery results exhibit global linear convergence. In addition, increasing observation values leads to not only more accurate recovery, but also faster convergence.

Key words:compressed sensing; matrix recovery; homotopy proximity mapping(HPM); linear convergence

低秩矩阵恢复问题是在给定矩阵的若干线性测量值中重建未知的低秩矩阵,该问题在压缩感知、模型选择以及高维图像处理中得到了广泛研究^[1-3]。设 $\mathbf{X}_* \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$ 为目标低秩矩阵, $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{X}_* + \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ 为 \mathbf{X}_* 的 m 个测量值,其中: $\mathcal{A}: \mathbf{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为测量算子; $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ 为观测中潜在噪声的编码向量; $m \leq \min\{n_1, n_2\}$ 。本文的任务是从 \mathbf{y} 和 \mathcal{A} 中恢复 \mathbf{X}_* 。在不同的设置和条件下,低秩矩阵恢复已经发展了许多算法和结果^[4-5]。如果满足期望约束的模型集是凸的,那么选择最简单的模型可以转化为秩最小化问题,即

$$\min \text{rank}(\mathbf{X});$$

$$\text{s. t. } \mathbf{X} \in C.$$

其中: $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$ 为决策变量; C 为给定凸约束集。一般来说,上述问题通常是 NP-hard。针对该问题,文献[6-7]给出了启发式方法,将秩转化为核范数,这是由于核范数是秩函数在单位范数球上的凸包络^[8]。文献[9]证明了当 \mathcal{A} 满足限制等距性质(restricted isometry property, RIP)时,可成功实现低秩恢复且恢复的矩阵是唯一的。然而现实中存在噪声,可将低秩矩阵恢复问题转化为以下无约束核范数正则化最小二乘问题,即

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\mathbf{X} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{X}\|_* \right\}.$$

收稿日期:2023-03-30;修回日期:2023-04-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62173121)

作者简介:班书宇(1996—),男,山东临沭人,合肥工业大学硕士生;

黄尉(1977—),男,安徽太湖人,博士,合肥工业大学教授,硕士生导师,通信作者, E-mail: whuang@hfut.edu.cn.

其中, λ 为正则化参数。

对于该类问题,文献[10-11]提出了奇异值阈值(singular value thresholding, SVT)算法,用以提高计算速度,减少矩阵恢复所需的迭代次数;文献[12]利用核范数变分特征来逼近核范数。

本文通过分析一种新的优化算法的收敛性来研究低秩矩阵恢复问题,将该算法命名为同伦临近映射(homotopy proximity mapping, HPM)算法,在每次迭代时对核范数正则化采用一个临近映射:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - [\mathbf{X}_k - \mathcal{A}^*(\mathcal{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{y})]\|_{\text{F}}^2 + \lambda_k \|\mathbf{X}\|_* \right\}.$$

与传统意义上的临近梯度算法^[13]相比,HPM 算法采用了递减步长,加速了计算速度;HPM 算法与迭代硬阈值(iterative hard thresholding, IHT)算法和 SVT 算法相比,具有更好的收敛速度和更准确的恢复。

1 基础知识

矩阵 \mathbf{X} 的奇异值分解(singular value decomposition, SVD)为 $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* = \sum_{i=1}^N \sigma_i(\mathbf{X}) \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*$, \mathbf{X} 的“支撑”为 $T = \{\mathbf{U}\mathbf{R}^* + \mathbf{Q}\mathbf{V}^* : \mathbf{R} \in \mathbf{R}^{n_2 \times r}, \mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n_1 \times r}\} \subseteq \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, “符号”为 \mathbf{UV}^* , 且有 $\langle \mathbf{UV}^*, \mathbf{X} \rangle = \|\mathbf{X}\|_*$ ^[8]. 空间 T 的正交补为 $T^\perp = \{\mathbf{M} : \operatorname{col}(\mathbf{M}) \perp \operatorname{col}(\mathbf{X}), \operatorname{row}(\mathbf{M}) \perp \operatorname{row}(\mathbf{X})\}$. 用 $T_1 \setminus T_2$ 表示 T_1 的一个子空间但不属于 T_2 , 再给出空间 T 的秩的定义:

$$\operatorname{rank}(T) = \max\{\operatorname{rank}(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in T\} \quad (1)$$

即 T 中元素秩的最大值。

相应地,定义 $\|\cdot\|_{\text{F}}$ 、 $\|\cdot\|_*$ 、 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的 F-范数、核范数、算子范数,即 $\|\mathbf{X}\|_{\text{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2(\mathbf{X})}$ 、 $\|\mathbf{X}\|_* = \sum_{i=1}^N \sigma_i(\mathbf{X})$ 、 $\|\mathbf{X}\| = \sigma_1(\mathbf{X})$ (最大奇异值)。

对于某些矩阵序列 $\{\mathbf{A}_i\}$ 和标准内积 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{X} \rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^* \mathbf{X})$, $\mathcal{A}\mathbf{X}$ 的第 i 项为 $(\mathcal{A}\mathbf{X})_i = \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{X} \rangle$, 即

$$\mathcal{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \operatorname{vec}(\mathbf{A}_1) \\ \operatorname{vec}(\mathbf{A}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{vec}(\mathbf{A}_m) \end{bmatrix} \operatorname{vec}(\mathbf{X}) \quad (2)$$

其中, $\operatorname{vec}(\mathbf{X})$ 为 \mathbf{X} 的列叠加得到的长向量。

若记 \mathbf{A} 为算子 \mathcal{A} 的矩阵形式,则 $\mathcal{A}\mathbf{X} = \mathbf{A} \operatorname{vec}(\mathbf{X})$. \mathcal{A} 的伴随算子为 $\mathcal{A}^* : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$,

$\mathcal{A}^* \mathbf{z} = \sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i \mathbf{A}_i$. 用 $\mathcal{A}|_T$ 表示算子 \mathcal{A} 在子空间 T 上的限制,简写为 \mathcal{A}_T , 且有:

$$\mathcal{A}_T(\mathbf{X}) = \mathcal{A}(P_T \mathbf{X}), \mathcal{A}_T^*(\mathbf{z}) = P_T(\mathcal{A}^* \mathbf{z}) \quad (3)$$

其中, $P_T \mathbf{X}$ 为 \mathbf{X} 到子空间 T 上的正交投影。

2 定义和命题

定义 1 线性算子 $\mathcal{A} : \mathbf{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbf{R}^m$ 满足 r 阶秩限制等距性质(r -RIP)^[9]. 如果存在正常数 $\delta < 1$, 使得对于任意秩不超过 r 且支撑在 T 上的矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 那么有:

$$(1 - \delta_r) \|\mathbf{X}\|_{\text{F}}^2 \leq \|\mathcal{A}_T(\mathbf{X})\|_{\text{F}}^2 \leq (1 + \delta_r) \|\mathbf{X}\|_{\text{F}}^2 \quad (4)$$

引理 1^[14] 对任意 2 个矩阵 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 且满足 $\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle = 0$, $\operatorname{rank}(\mathbf{X}_1) \leq r$, $\operatorname{rank}(\mathbf{X}_2) \leq r'$, $r + r' \leq \min\{n_1, n_2\}$, 则

$$|\langle \mathcal{A}(\mathbf{X}_1), \mathcal{A}(\mathbf{X}_2) \rangle| \leq \delta_{r+r'} \|\mathbf{X}_1\|_{\text{F}} \|\mathbf{X}_2\|_{\text{F}} \quad (5)$$

定义 2(r, r' -限制正交常数)^[15] 设 $\theta_{r,r'}$ 为满足以下条件的最小常数: 对任意 2 个正交子空间 $T_1, T_2 \subseteq \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 且 $\operatorname{rank}(T_1) \leq r$, $\operatorname{rank}(T_2) \leq r'$, $r + r' \leq \min\{n_1, n_2\}$, 则对任意的 $\mathbf{X}_1 \in T_1, \mathbf{X}_2 \in T_2$, 有

$$|\langle \mathcal{A}_{T_1}(\mathbf{X}_1), \mathcal{A}_{T_2}(\mathbf{X}_2) \rangle| \leq \theta_{r+r'} \|\mathbf{X}_1\|_{\text{F}} \|\mathbf{X}_2\|_{\text{F}} \quad (6)$$

根据 δ_r 和 $\theta_{r,r'}$ 的定义, 可得以下命题。

命题 1^[16] 假设线性算子 $\mathcal{A} : \mathbf{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbf{R}^m$ 满足 r 阶秩 RIP, T 为 $\mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$ 的子空间, 满足对任意的 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 有 $\operatorname{rank}(P_T \mathbf{X}) \leq r$, 则对所有 $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 以下性质成立:

$$\|\mathcal{A}_T^* \mathbf{z}\|_{\text{F}} \leq \sqrt{1 + \delta_r} \|\mathbf{z}\|_2, \\ (1 - \delta_r) \|P_T \mathbf{X}\|_{\text{F}} \leq$$

$$\|\mathcal{A}_T^* \mathcal{A}_T \mathbf{X}\|_{\text{F}} \leq (1 + \delta_r) \|P_T \mathbf{X}\|_{\text{F}} \quad (7)$$

即限制等距常数 δ_r 的定义意味着 $\mathcal{A}_T^* \mathcal{A}_T$ 的全部特征值位于区间 $[1 - \delta_r, 1 + \delta_r]$ 。

命题 2^[17] 对任意的 2 个正交子空间 $T_1, T_2 \subseteq \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 且 $\operatorname{rank}(T_1) \leq r$, $\operatorname{rank}(T_2) \leq r$, $2r \leq \min\{n_1, n_2\}$, 限制正交常数 $\theta_{r,r}$ 的定义意味着 $\|\mathcal{A}_{T_1}^* \mathcal{A}_{T_2}\|_{\text{F}} \leq \theta_{r,r}$ 。

当 δ_r 非常小时, $\|\mathcal{A}\mathbf{X}\|_{\text{F}}^2 \approx \|\mathbf{X}\|_{\text{F}}^2$. δ_r 和 $\theta_{r,r}$ 用以描述测量矩阵 \mathbf{A}_i 与标准正交系的接近程度。这 2 个常数是压缩感知分析中的标准工具。

3 算法及主要结果

考虑以下优化问题:

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}} \mathcal{L}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_*\|_{\text{F}}^2 \quad (8)$$

显然,式(8)的最优解为 \mathbf{X}_* 。若用梯度下降法对式(8)中的问题进行优化,得到如下更新方程:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - [\mathbf{X}_k - \nabla \mathcal{L}(\mathbf{X}_k)]\|_{\text{F}}^2 \right\} \quad (9)$$

其中, $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*$ 。

式(8)中的问题既光滑又强凸,因此上述更新具有线性收敛速度,实际上只需 1 步,即可高效地重构 \mathbf{X}_* ,但不能使用式(9)中的更新。因为需要获取 \mathbf{X}_* 的完整信息,所以在压缩感知中,关于 \mathbf{X}_* 的唯一可用信息是观测值 $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{X}_* + \mathbf{z}$ 。利用观测值可构造如下近似梯度:

$$\hat{\nabla} \mathcal{L}(\mathbf{X}_k) = \mathcal{A}^* \mathcal{A}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*) - \mathcal{A}^* \mathbf{z} \quad (10)$$

如果 $\mathcal{A}^* \mathcal{A}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)$ 接近 $\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*$,而 $\mathcal{A}^* \mathbf{z}$ 的值较小,那么 $\hat{\nabla} \mathcal{L}(\mathbf{X}_k)$ 将提供 $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{X}_k)$ 的一个有用估计。为了确保这一点,现对 \mathcal{A} 和噪声 \mathbf{z} 附加一定限制条件。

接下来,用 $\hat{\nabla} \mathcal{L}(\mathbf{X}_k)$ 作为 $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{X}_k)$ 的近似值,并执行以下临近映射更新解:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}} \left\{ \lambda_k \|\mathbf{X}\|_* + \langle \mathbf{X} - \mathbf{X}_k, \hat{\nabla} \mathcal{L}(\mathbf{X}_k) \rangle + \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_k\|_{\text{F}}^2 \right\} \quad (11)$$

其中, λ_k 为一个随迭代次数减小的核范数正则化参数。通过选择合适的 λ_k ,正则化项将从本质上消除梯度近似产生的噪声,从而得到全局线性收敛速度。式(11)可改写为:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - (\mathbf{X}_k - \mathcal{A}^* (\mathcal{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{y}))\|_{\text{F}}^2 + \lambda_k \|\mathbf{X}\|_* \right\} \quad (12)$$

文献[10]给出了 \mathbf{X}_{k+1} 的值,若 $\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{U} \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\min\{n_1, n_2\}}) \mathbf{V}^*$, 则

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathcal{D}_{\lambda_k}(\hat{\mathbf{X}}_k) = \mathbf{U} \operatorname{diag}((\sigma_i - \tau)_+) \mathbf{V}^* \quad (13)$$

其中, $\hat{\mathbf{X}}_k$ 为进行软阈值前的中间解,其公式为:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k - \mathcal{A}^* (\mathcal{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{y}) \quad (14)$$

由此给出了重构给定一组有噪声观测的低秩矩阵的算法。在本文,记 $n_1 = \min\{n_1, n_2\}$ 。

算法 1 用于恢复低秩矩阵的 HPM 算法。

输入:秩为 r 的目标阵 $\mathbf{X}_* \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 随机测量算子 \mathcal{A} :

$\mathbf{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbf{R}^m$, 观测值 $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{X}_* + \mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$, 迭代总次数

K , 正则化参数序列 $\lambda_1, \dots, \lambda_K$

输出: \mathbf{X}_{K+1}

1. 初始化: $\mathbf{X}_1 = \mathbf{O}$

2. 对 $k=1, \dots, K$, 计算 $\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k - \mathcal{A}^* (\mathcal{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{y})$, 更新 $\mathbf{X}_{k+1} = \mathcal{D}_{\lambda_k}(\hat{\mathbf{X}}_k)$

3. 返回 \mathbf{X}_{K+1}

定理 1 设 $\mathbf{X}_* \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$ 为一个秩为 r 的矩阵, $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{X}_* + \mathbf{z}$ 为 \mathbf{X}_* 的 m 个带噪测量值。假设 \mathcal{A} 满足 r 阶秩-RIP, $\delta_{3r} \leq \theta / [\sqrt{n_1/r} (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}]$, $\theta \in (0, 1)$ 。序列 $\{\alpha_k\}$ 满足:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_*\|_{\text{F}} &\leq \alpha_1, \\ \alpha_{k+1} &= \beta \alpha_k + \gamma \|\mathbf{z}\|_2 \end{aligned} \quad (15)$$

若在算法 1 中设置

$$\lambda_k = \frac{\delta_r + \sqrt{2} \theta_{r,r}}{\sqrt{r}} \alpha_k + \sqrt{\frac{1 + \delta_r}{r}} \|\mathbf{z}\|_2,$$

则对任意的 $k \geq 0$, 有

1) $\operatorname{rank}(T_{k+1} \setminus T_*) \leq r$;

2) $\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*\|_{\text{F}} \leq \beta^k \alpha_1 + (1 - \beta^k) \gamma \|\mathbf{z}\|_2 / (1 - \beta)$, 其中:

$$\beta = \frac{\delta_r + \sqrt{2} \theta_{r,r}}{\sqrt{r}} \sqrt{n_1} + \sqrt{2} \delta_{3r} < 1,$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{n_1(1 + \delta_r)}{r}} + \sqrt{1 + \delta_{2r}};$$

3) 至多经过 k^* 次迭代, $k^* = \lceil \log_{\beta} \{\gamma \|\mathbf{z}\|_2 / [\alpha_1(1 - \beta)]\} \rceil$, 可得如下误差估计:

$$\|\mathbf{X}_{k^*} - \mathbf{X}_*\|_{\text{F}} \leq \frac{2\gamma}{1 - \beta} \|\mathbf{z}\|_2 \quad (16)$$

在定理 1 中,对于任意 $\theta \in (0, 1)$, \mathbf{X}_k 都保证收敛。这里的 θ 无特别之处,它的存在只是为了使定理 1 中 RIP 条件可以取到等号。特别地,当 $r = n_1$ 时,可选择 $\theta = 1/2$, 此时 $\delta_{3r} \leq 1/(2 + 4\sqrt{2}) \approx 0.1306$ 。

$$\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*\|_{\text{F}} \leq 2^{-k} \alpha_1 + 4.2532 \|\mathbf{z}\|_2,$$

$$\|\mathbf{X}_{k^*} - \mathbf{X}_*\|_{\text{F}} \leq 5.2532 \|\mathbf{z}\|_2 \quad (17)$$

定理 1 的证明需要以下命题和推论。为方便起见,记

$$\rho_k = \frac{\delta_r + \sqrt{2} \theta_{r,r}}{\sqrt{r}} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*\|_{\text{F}} + \sqrt{\frac{1 + \delta_r}{r}} \|\mathbf{z}\|_2 \quad (18)$$

命题 3 设 T_k 为 \mathbf{X}_k (HPM 的第 k 次迭代) 的支撑, T_* 为 \mathbf{X}_* 的支撑, 定义 $B_k = T_k + T_*$, $B_k^{\perp} = T_k \setminus T_* = T_k \cap T_*^{\perp}$, $\tilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k - \mathcal{A}^* \mathcal{A}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*) + \mathcal{A}^* \mathbf{z}$ 。假设 $\operatorname{rank}(B_k^{\perp}) \leq r$, 则 $P_{T_*^{\perp}}(\tilde{\mathbf{X}}_k)$ 至多有 r 个奇异值大于 ρ_k 。

证明 在 T_*^{\perp} 中取秩为 r 的任意子空间 T' ,

令 $T'_1 = T' \cap B_k^a$, $T'_2 = T' \setminus B_k^a = T' \cap (B_k^a)^\perp$ 。则

$$\begin{aligned} & \|P_{T_1'}(\tilde{\mathbf{X}}_k)\|_F \leq \| \mathcal{A}_{T'}^* \mathcal{A}_{T_*}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*) + \\ & \mathcal{A}_{T'}^* \mathcal{A}_{B_k^a}(\mathbf{X}_k) - P_{T'}(\mathcal{A}^* \mathbf{z}) \|_F + \|P_{T'}(\mathcal{A}^* \mathbf{z})\|_F \end{aligned} \quad (19)$$

这是由于 $\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*$ 的支撑为 B_k , 可以将该支撑划分为 2 个不相交的子集, 即 $B_k = B_k^a + T_*$, $B_k^a \cap T_* = \emptyset$ 。

对任意的 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 有 $\text{rank}(P_{T'} \mathbf{X}) \leq r$, 根据式(7)得:

$$\|P_{T'}(\mathcal{A}^* \mathbf{z})\|_F \leq \sqrt{1 + \delta_r} \|\mathbf{z}\|_2 \quad (20)$$

由定义 1, T' 也可划分为 2 个不相交的子集, 即 $T' = T_1' + T_2'$, $T_1' \cap T_2' = \emptyset$, 因此, 对任意的 $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 有 $\|P_{T'}(\mathbf{Y})\|_F = \|P_{T_1'}(\mathbf{Y})\|_F + \|P_{T_2'}(\mathbf{Y})\|_F$ 。

因为 T_k 为 \mathbf{X}_k 的支撑, $T_2' = T \setminus B_k^a$, $B_k^a = T_k \setminus T_*$, $T' \subset T_*^\perp$, 所以得 $P_{T_2'}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{O}$ 。

若 $\text{rank}(B_k^a) \leq r$, $\text{rank}(T) \leq r$, $\text{rank}(T_*) \leq r$, 则 $\text{rank}(T'_2) \leq r$ 。取 $\mathbf{Y} = \mathcal{A}^* \mathcal{A}_{B_k^a}(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k$, 并结合 RIP 条件(命题 1 和命题 2), 有

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{A}_{T'}^* \mathcal{A}_{T_*}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*) + \mathcal{A}_{T'}^* \mathcal{A}_{B_k^a}(\mathbf{X}_k) - \\ & P_{T'}(\mathbf{X}) \|_F \leq \| \mathcal{A}_{T'}^* \mathcal{A}_{T_*}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*) \|_F + \\ & \| \mathcal{A}_{T_2'}^* \mathcal{A}_{B_k^a} P_{B_k^a}(\mathbf{X}_k) \|_F + \| \mathcal{A}_{T_1'}^* \mathcal{A}_{B_k^a}(\mathbf{X}_k) - \\ & P_{T_1'}(\mathbf{X}_k) \|_F \leq \| \mathcal{A}_{T'}^* \mathcal{A}_{T_*} \|_F \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*\|_F + \\ & \| \mathcal{A}_{T_2'}^* \mathcal{A}_{B_k^a} \|_F \|P_{B_k^a}(\mathbf{X}_k)\|_F + \|(\mathcal{A}_{B_k^a}^* \mathcal{A}_{B_k^a} - \\ & \epsilon)P_{B_k^a}(\mathbf{X}_k)\|_F \leq \theta_{r,r} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*\|_F + \\ & \theta_{r,r} \|P_{B_k^a}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*)\|_F + \delta_r \|P_{B_k^a}(\mathbf{X}_k - \\ & \mathbf{X}_*)\|_F \leq (\delta_r + \sqrt{2}\theta_{r,r}) \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*\|_F \end{aligned} \quad (21)$$

将式(20)和式(21)代入式(19)中, 则有:

$$\|P_{T_1'}(\tilde{\mathbf{X}}_k)\|_F \leq \sqrt{r}\rho_k \quad (22)$$

特别地, 取 T' 为 $P_{T_*^\perp}(\tilde{\mathbf{X}}_k)$ 中奇异值最大的 r 个矩阵生成的子空间, 则 $P_{T'}(\tilde{\mathbf{X}}_k)$ 中最小的奇异值必须小于等于 ρ_k , 否则 $\|P_{T'}(\tilde{\mathbf{X}}_k)\|_F > \sqrt{r}\rho_k$, 这与式(22)矛盾。根据 T' 的构造可知, $P_{T_*^\perp}(\tilde{\mathbf{X}}_k)$ 至多有 r 个奇异值大于 ρ_k 。

推论 1 设 T_k 和 T_* 分别为 \mathbf{X}_k 和 \mathbf{X}_* 的支撑, 若 $\text{rank}(T_k \setminus T_*) \leq r$, $\lambda_k \geq \rho_k$, 则 $\text{rank}(T_{k+1} \setminus T_*) \leq r$, $\text{rank}(T_* + T_k + T_{k+1}) \leq 3r$ 。

证明 根据算法 1 知, $\mathbf{X}_{k+1} = \mathcal{D}_{\lambda_k}(\hat{\mathbf{X}}_k)$, 又 $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{X}_* + \mathbf{z}$, 则

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_k &= \mathbf{X}_k - \mathcal{A}^*(\mathcal{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{y}) = \\ & \mathbf{X}_k - \mathcal{A}^* \mathcal{A}(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*) + \mathcal{A}^* \mathbf{z} \end{aligned} \quad (23)$$

由命题 3, 在 $P_{T_*^\perp}(\hat{\mathbf{X}}_k)$ 中至多有 r 个奇异值大于等于 ρ_k , 当给定 λ_k 的界, $P_{T_*^\perp}(\mathbf{X}_{k+1})$ 的秩至

多为 r , 因此 $\text{rank}(T_{k+1} \setminus T_*) \leq r$, $\text{rank}(T_* + T_k + T_{k+1}) \leq 3r$ 。

定理 1 的证明 当 $k=0$ 时结论显然成立; 现设对任意 $k \geq 1$, $\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*\|_F \leq \alpha_k$, 证 $k+1$ 时也成立。此时 $\lambda_k \geq \rho_k$ 符合推论 1 的条件, $\text{rank}(T_{k+1} \setminus T_*) \leq r$ 。记 $\mathbf{Z}_k = \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*$, 由式(23)得:

$$\begin{aligned} & \|P_{B_{k+1}}(\hat{\mathbf{X}}_k) - P_{B_{k+1}}(\mathbf{X}_*)\|_F = \\ & \|P_{B_{k+1}}(\mathbf{X}_k) - P_{B_{k+1}}(\mathbf{X}_*) - \\ & P_{B_{k+1}} \mathcal{A}^* \mathcal{A}(\mathbf{Z}_k) + P_{B_{k+1}}(\mathcal{A}^* \mathbf{z})\|_F \leq \\ & \|(\epsilon - \mathcal{A}_{B_{k+1}}^* \mathcal{A}_{B_{k+1}})P_{B_{k+1}}(\mathbf{Z}_k)\|_F + \\ & \| \mathcal{A}_{B_{k+1}}^* \mathcal{A}((\epsilon - P_{B_{k+1}})\mathbf{Z}_k) \|_F + \|P_{B_{k+1}}(\mathcal{A}^* \mathbf{z})\|_F \end{aligned} \quad (24)$$

由于对任意 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 有 $\text{rank}(P_{B_{k+1}} \mathbf{X}) \leq 2r$, 根据式(7)得:

$$\|P_{B_{k+1}}(\mathcal{A}^* \mathbf{z})\|_F \leq \sqrt{1 + \delta_{2r}} \|\mathbf{z}\|_2 \quad (25)$$

因此,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*\|_F \leq \lambda_k \sqrt{n_1} + \\ & \|P_{B_{k+1}}(\hat{\mathbf{X}}_k) - P_{B_{k+1}}(\mathbf{X}_*)\|_F \leq \\ & \lambda_k \sqrt{n_1} + \delta_{2r} \|P_{B_{k+1}}(\mathbf{Z}_k)\|_F + \\ & \delta_{3r} \|(\epsilon - P_{B_{k+1}})\mathbf{Z}_k\|_F + \sqrt{1 + \delta_{2r}} \|\mathbf{z}\|_2 \leq \\ & \left[\frac{\delta_r + \sqrt{2}\theta_{r,r}}{\sqrt{r}} \|\mathbf{Z}_k\|_F + \sqrt{\frac{1 + \delta_r}{r}} \|\mathbf{z}\|_2 \right] \sqrt{n_1} + \\ & \sqrt{2}\delta_{3r} \|\mathbf{Z}_k\|_F + \sqrt{1 + \delta_{2r}} \|\mathbf{z}\|_2 = \\ & \beta \|\mathbf{Z}_k\|_F + \gamma \|\mathbf{z}\|_2 \end{aligned} \quad (26)$$

故有 $\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*\|_F \leq \beta \alpha_k + \gamma \|\mathbf{z}\|_2 = \alpha_{k+1}$, 进而 $\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*\|_F \leq \beta^k \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_*\|_F + \frac{1 - \beta^k}{1 - \beta} \gamma \|\mathbf{z}\|_2 \leq \beta^k \alpha_1 + \frac{\gamma}{1 - \beta} \|\mathbf{z}\|_2$ (27)

特别地, $\beta^k \alpha_1 \leq \gamma \|\mathbf{z}\|_2 / (1 - \beta)$ 时, $\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_*\|_F \leq 2\gamma \|\mathbf{z}\|_2 / (1 - \beta)$, 因此对于 $k^* = \lceil \log_{\beta} \{ \gamma \|\mathbf{z}\|_2 / [\alpha_1 (1 - \beta)] \} \rceil$, 式(16)成立。

4 实验结果与分析

使用 Python 3.10 进行编程, 算子 \mathcal{A} 的每个元素 \mathbf{A}_i 通过高斯分布生成, 均值为 0, 方差为 $1/m$, 采用第 1 节中 $\mathcal{A}\mathbf{X}$ 和 $\mathcal{A}^* \mathbf{z}$ 的形式。接下来生成目标信号 $\mathbf{X}_* \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, 使得信号的每个元素服从标准正态分布, 将目标信号的第 i 个奇异值设为 i^{-1} , 然后进行 F-范数归一化处理。噪声 \mathbf{z} 来自均匀分布 $[-\sigma, \sigma]$ 。为避免 RIP 常数的影响, 在算法 1 中设置 $\lambda_k = (\eta \alpha_k + \sqrt{2} \|\mathbf{z}\|_2) / \sqrt{r}$, 其中, $0 < \eta < \sqrt{2} - 1$; 为生成误差界 α_k 的曲线, 设置 $\alpha_1 = \|\mathbf{X}_*\|_F$, $\alpha_{k+1} = \beta \alpha_k + \gamma \|\mathbf{z}\|_2$, 其中: $\beta = (1 +$

$\sqrt{2})\eta, \gamma > 0$ 。参数设置为 $m=2\ 000, n_1=10, n_2=20, r=5, \eta=0.3, \sigma=0.003, \gamma=3$ 。经 50 次迭代, 生成恢复误差 $q = \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_*\|_F$, 误差界 α_k 和解的秩 r 与迭代次数 k 之间的关系如图 1 所示。为了便于比较, 实验中的误差均取自然对数。从图 1 可以看出, 恢复误差的上界为 α_k , 所有迭代的秩不超过 10, 这验证了定理 1 的结论。

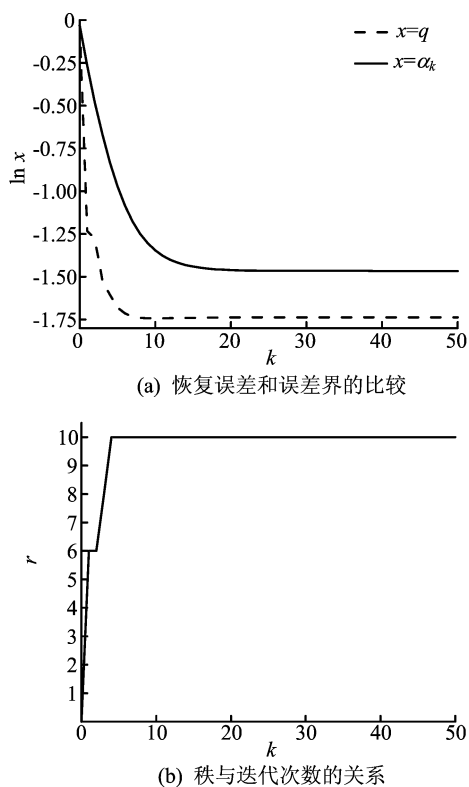
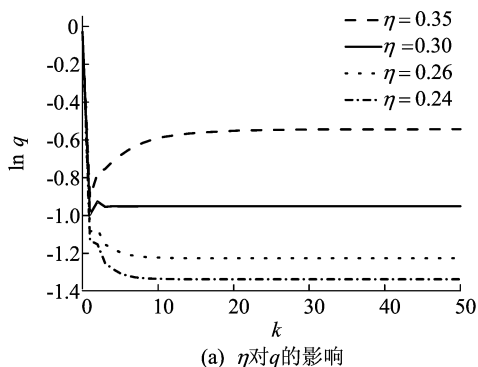


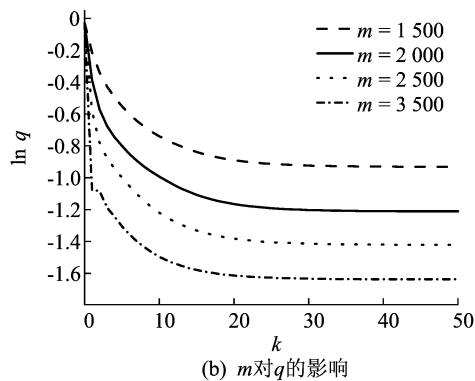
图 1 恢复误差和秩与迭代的关系

为了更好地分析参数 η 和 m 对算法的影响, 本文进行了比较实验, 结果如图 2 所示。图 2 中: 对比 η 时, m 设置为 2 800; 对比 m 时, η 设置为 0.35; 其他参数不变。

由图 2 可知: η 越小, 收敛速度越快, 恢复精度越高; m 越大, 收敛速度越快, 恢复越准确。



(a) η 对 q 的影响



(b) m 对 q 的影响

图 2 不同参数对误差的关系

$r=3$ 时将 HPM 算法与经典的 IHT 算法^[18]、SVT 算法^[10]进行比较, 结果如图 3 所示。

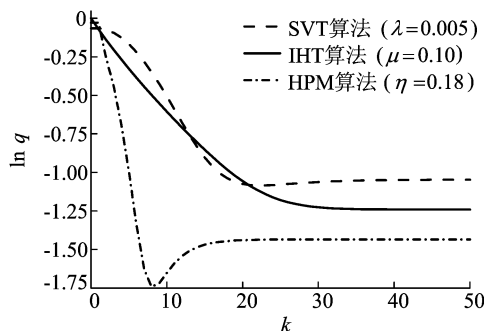


图 3 HPM 算法与 IHT、SVT 算法的对比

从图 3 可以看出, HPM 算法与另外 2 种算法相比, 恢复速度更快、精度更高。

5 结 论

本文提出的 HPM 算法用于从信号的(噪声)线性测量中重构低秩矩阵, 并证明了其全局线性收敛。通过仿真实验验证了定理 1 的结论, 并分析不同参数对算法的影响。与传统的 IHT 算法、SVT 算法相比, HPM 算法在适当的参数下, 可以表现出更优的性能。由于算法依赖目标秩和目标信号的 F-范数, 未来还可以对其进行改进。

[参 考 文 献]

[1] YAN H Y, HUANG Y M, YU Y C. A matrix rank minimization-based regularization method for image restoration [J]. Digital Signal Processing, 2022, 130: 1-21.
 [2] ZHANG H, ZHAO X L, JIANG J X, et al. Multiscale feature tensor train rank minimization for multidimensional image recovery [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(11): 13395-13410.
 [3] LI Y Y, JIANG Y Q, ZHANG H M, et al. Nonconvex L1/2

- regularized nonlocal self-similarity denoiser for compressive sensing based CT reconstruction[J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(6): 4172-4195.
- [4] YANG C, GU Y, CHEN B, et al. 2-D learned proximal gradient algorithm for fast sparse matrix recovery[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2021, 68(4): 1492-1496.
- [5] XIA Y, ZHOU L K. Adaptive iterative hard thresholding for low-rank matrix recovery and rank-one measurements [J]. Journal of Complexity, 2023, 76: 1-19.
- [6] FAZEL M. Matrix rank minimization with applications[D]. Stanford; Stanford University, 2002.
- [7] FAZEL M, HINDI H, BOYD S. A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation[C]//Proceedings of the 2001 American Control Conference. Arlington; IEEE, 2001: 4734-4739.
- [8] WRIGHT J, MA Y. High-dimensional data analysis with low-dimensional models: principles, computation, and applications[M]. Cambridge, Eng. : Cambridge University Press, 2018: 151-160.
- [9] RECHT B, FAZEL M, PARILLO P. Guaranteed minimum rank solution of matrix equations via nuclear norm minimization[J]. SIAM Review, 2010, 52(3): 471-501.
- [10] CAI J, CANDÈS E J, SHEN Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [11] XU K, ZHANG Y, XIONG Z. Iterative rank-one matrix completion via singular value decomposition and nuclear norm regularization[J]. Information Sciences, 2021, 578: 574-591.
- [12] ZHAO T, ZHANG Y L, ZHANG L W. The stability of a generalized variational inequality problem with the nuclear norm function [J]. SCIENTIA SINICA Mathematica, 2022, 52(1): 85-104.
- [13] TOH K C, YUN S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized linear least squares problems[J]. Pacific Journal of Optimization, 2010, 6(3): 615-640.
- [14] CANDÈS E J, TAO T. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(11): 4203-4215.
- [15] CAI T T, ZHANG A. Compressed sensing and affine rank minimization under restricted isometry[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(13): 3279-3290.
- [16] GOLDFARB D, MA S Q. Convergence of fixed-point continuation algorithms for matrix rank minimization [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2011, 11(2): 183-210.
- [17] WANG J, KWON S, SHIM B. Near optimal bound of orthogonal matching pursuit using restricted isometric constant[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2012, 1: 1-7.
- [18] FOUCART S, SUBRAMANIAN S. Iterative hard thresholding for low-rank recovery from rank-one projections [J]. Linear Algebra and its Applications, 2019, 572: 117-134.

(责任编辑 闫杏丽)

(上接第 1105 页)

- [29] RUAN C, KONG J, HE X, et al. Interaction between polyphenols and amyloids; from the view of prevention of protein misfolding disorders related diseases[J]. Food Materials Research, 2022, 2(1): 1-15.
- [30] XU J, WANG Q, YU J, et al. Effect of Fe(III) on soybean protein-gallic acid hydrogel: structure, functional properties, and digestive properties [J]. Food Hydrocolloids, 2024, 156: 110309.
- [31] BAZMANDEH A Z, MIRZAEI E, FADAIE M, et al. Dual spinneret electrospun nanofibrous/gel structure of chitosan-gelatin/chitosan-hyaluronic acid as a wound dressing; *in-vitro* and *in-vivo* studies[J]. International Journal of Biological Macromolecules, 2020, 162: 359-373.
- [32] YAN M, AN X, DUAN S, et al. A comparative study on cross-linking of fibrillar gel prepared by tilapia collagen and hyaluronic acid with EDC/NHS and genipin[J]. International Journal of Biological Macromolecules, 2022, 213: 639-650.
- [33] LOU W, CHEN Y, MA H, et al. Antioxidant and α -amylase inhibitory activities of tannic acid[J]. J Food Sci Technol, 2018, 55(9): 3640-3646.
- [34] LI T, WANG L, ZHANG X, et al. Complexation of rice glutelin fibrils with cyanidin-3-O-glucoside at acidic condition; thermal stability, binding mechanism and structural characterization[J]. Food Chemistry, 2021, 363: 130367.
- [35] BELHAOUES S, AMRI S, BENSOUILAH M. Major phenolic compounds, antioxidant and antibacterial activities of *Anthemis praecox* link aerial parts[J]. South African Journal of Botany, 2020, 131: 200-205.
- [36] PANDEY A, NEGI P S. Phytochemical composition, *in vitro* antioxidant activity and antibacterial mechanisms of *Neolamarckia cadamba* fruits extracts[J]. Natural Product Research, 2018, 32(10): 1189-1192.
- [37] HE Q, ZHANG L, YANG Z, et al. Antibacterial mechanisms of thyme essential oil nanoemulsions against *Escherichia coli* O157: H7 and *Staphylococcus aureus*; alterations in membrane compositions and characteristics[J]. Innovative Food Science & Emerging Technologies, 2022, 75: 102902.

(责任编辑 闫杏丽)