

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2025.02.018

连续排水边界双层地基一维固结黏弹性解

邱昌虎¹, 蒋明杰¹, 杨伟涛¹, 梅国雄²

(1. 广西大学 土木建筑工程学院, 广西 南宁 530004; 2. 浙江大学 海洋学院, 浙江 舟山 316021)

摘要:文章基于连续排水边界,利用 Merchant 模型描述土体的黏弹性,并结合 Terzaghi 一维固结理论建立荷载作用下双层地基一维固结模型。通过边界转换法和 Laplace 变换推导频域内控制方程的解析解,利用 Stehfest 数值逆变换法得到时域内土体超孔隙水压力和沉降的半解析解,并依次给出沉降和孔隙水压力定义下 2 种固结度的半解析表达式。基于已有的单层黏弹性解,退化分析验证了解法的正确性。最后,通过算例分析探究 2 种定义下固结度的区别以及界面参数、土体物理力学性质和水文地质参数对地基固结过程的影响。结果表明:相较于已有的弹性解答,黏弹性解解释了土体变形总是滞后于超孔隙水压力消散的现象;超孔隙水压力的消散速率随界面参数的增大而加快,黏滞系数越小且渗透系数越大时土体固结越快,但黏滞系数对固结的影响主要在中后期,渗透系数的影响则主要体现在前中期。该研究结果可为软土地基的沉降预测提供一定的理论参考。

关键词:连续排水边界;双层地基;固结;黏弹性;半解析解

中图分类号:TU470.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2025)02-0260-07

Viscoelastic solutions of one-dimensional consolidation for double-layered foundation with continuous drainage boundary

QIU Changhu¹, JIANG Mingjie¹, YANG Weitao¹, MEI Guoxiong²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China; 2. Ocean College, Zhejiang University, Zhoushan 316021, China)

Abstract:Based on the continuous drainage boundary, combined with Terzaghi's one-dimensional consolidation theory, the one-dimensional consolidation model for double-layered foundation under external loads is established, in which the Merchant rheological model is used to simulate the soil viscoelasticity. The analytical solutions of the governing equation in the frequency domain are derived by applying the boundary transformation method and Laplace transform, and the semi-analytical solutions of excess pore water pressure in soil element and total settlement of foundation in the time domain are calculated by using the Stehfest numerical inversion method. The semi-analytical expressions for the two kinds of consolidation degrees defined by settlement and pore water pressure are given, respectively. Subsequently, the validity and correctness of the proposed solutions are verified by comparison with the degradation results of the present method and the existing viscoelastic solutions of single foundation. Finally, the detailed parametric analyses are conducted to reveal the difference between the two kinds of average consolidation degrees and the influences of interface parameters, physical and mechanical properties of the soil and hydrogeological parameters on the consolidation process of foundation. The results show that the proposed viscoelastic solutions, compared with the existing elastic

收稿日期:2023-04-25; **修回日期:**2023-05-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(52108309;52178321);广西自然科学基金资助项目(2021GXNSFBA196091)

作者简介:邱昌虎(1998—),男,安徽合肥人,广西大学硕士生;

蒋明杰(1990—),男,湖南邵阳人,博士,广西大学副教授,硕士生导师,通信作者,E-mail:20180121@gxu.edu.cn;

梅国雄(1975—),男,湖北黄梅人,博士,浙江大学教授,博士生导师。

solutions, illustrate the phenomenon that soil deformation always lags behind the dissipation of excess pore water pressure. Moreover, the dissipation rate of excess pore water pressure accelerates with the increment of interface parameters. The smaller the viscosity coefficient and the larger the permeability coefficient, the faster the soil consolidation, but the influence of viscosity coefficient on the consolidation is mainly in the middle and late stage of the consolidation process, while the influence of permeability coefficient is mainly reflected in the early and middle stage. The research conclusion of this paper can provide theoretical reference for the settlement prediction of soft soil foundation.

Key words: continuous drainage boundary; double-layered foundation; consolidation; viscoelasticity; semi-analytical solution

天然软土广泛分布于沿海地区,具有孔隙比大、压缩性高以及承载力低等特点^[1]。当外部环境(如地下水水位下降^[2]、地表堆积荷载^[3]等)发生改变时,软土地基表现出长期变形特性,以此诱发区域性沉降或地表不均匀沉降等地质灾害,严重影响了工后上部结构的正常使用,对经济建设的发展造成一定影响。因此,开展固结理论研究对于地基沉降的预测和防控具有理论指导价值^[4]。

理论研究可以定量分析土体变形而得到越来越多的关注,研究内容主要包括控制方程的建立、边界条件的假定以及初始条件的设定^[5]。其中边界条件反映了土体在固结过程中边界的排水能力,影响理论解的可靠性。在经典固结理论研究中,通常将固结边界视为完全透水或完全不透水边界,但土体边界的实际排水能力介于两者之间^[6]。为此,文献^[7]通过第一类边界和第二类边界的线性组合提出了半透水边界的概念;基于此,文献^[8]给出半透水边界条件下线性荷载作用时单层地基土的一维固结解;文献^[9-11]从土体的成层性出发,对半透水边界条件下土体的一维固结问题做出进一步完善。此外,考虑到土体的黏滞性,文献^[12-14]推导出不同荷载作用下成层地基土的一维黏弹性解。但是半透水边界的隐式表达式使得方程求解较为复杂且很难求得显示解,从而限制了该边界的推广应用。

在该背景下,文献^[15]从孔压消散曲线的特征出发提出连续排水边界,其不仅可以刻画边界孔压的时间效应,同时也简化理论推导计算。据此,基于连续排水边界,学者们已做了较多研究并取得一些有益的研究成果。例如在单层地基土方面,通过考虑土体的自重^[16-17]、起始水力坡降^[18-20]、荷载形式^[21-24]和温度^[25]等因素对土体固结的影响,连续排水边界一维固结理论得到了较为完善的发展。而鉴于土体具有黏滞性,近年来单层地基土的一维固结黏弹性解也得到了解

答^[26-27]。另外,有关连续排水边界的成层地基土研究,学者们利用 Laplace 变换和分离变量法等数学方法,从线弹性^[28-30]、非线性^[31]以及不同加载方式^[32]等角度出发,推导了连续排水边界条件下双层或成层地基土的一维固结解。

综上所述,基于连续排水边界固结理论已经取得了较为丰硕的研究成果,但有关外荷载下双层地基的黏弹性固结问题目前仍鲜有报道。为此,本文采用 Merchant 模型描述土体黏弹性,建立外荷载作用下连续排水边界双层黏弹性地基一维固结模型,通过 Laplace 变换等推导出地基土超孔隙水压力、沉降以及固结度的半解析解,并通过退化分析验证解答的正确性和合理性。最后,通过算例分析了界面参数、水文地质参数及土体物理力学性质等对地基固结的影响。

1 固结模型的建立

基于连续排水边界,外荷载作用下双层地基土固结模型如图 1 所示。

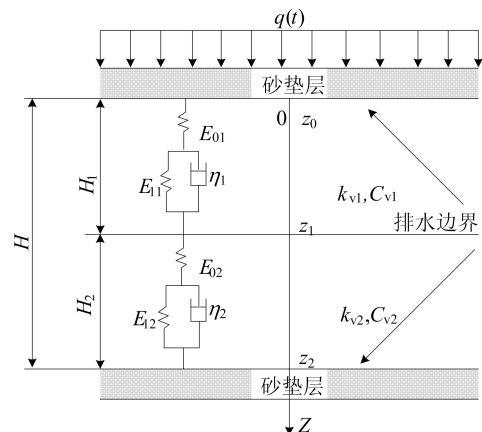


图 1 土体固结模型示意图

图 1 中: q 为外部荷载; H_1 、 H_2 分别为上、下土层的厚度,且满足 $H = H_1 + H_2$; k_{vi} 、 C_{vi} 分别为土体竖向渗透系数和固结系数; η_i 为黏滞系数;参

数 i 表示土层编号 ($i=1, 2$)。此外,采用 Merchant 模型描述土体黏弹性,并假设土体完全饱和且孔隙水的渗流遵循达西定律。

1.1 控制方程的建立

Merchant 模型由胡克弹簧和 Kelvin 体串联而成(图 1),其应力-应变关系如下:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i'}{E_{0i}} + \int_0^t \frac{\sigma_i'}{\eta_i} \exp\left[-\frac{E_{1i}}{\eta_i}(t-\tau)\right] d\tau \quad (1)$$

其中: σ_i' 为土体有效应力; E_{0i} 、 E_{1i} 均为弹簧模量; η_i 为黏壶系数; t 为时间。

根据土体流量连续平衡条件,得到土体一维固结微分方程为:

$$\frac{k_{vi}}{\gamma_w} \frac{\partial u_i^2(z,t)}{\partial z^2} = -\frac{\partial \varepsilon_i(z,t)}{\partial t} \quad (2)$$

其中: k_{vi} 为竖向渗透系数; γ_w 为水的重度; u_i 为超孔隙水压力; z 为竖向坐标。

基于有效应力原理,将式(1)代入式(2)可得土体固结控制方程,即

$$C_{vi} \frac{\partial^2 u_i(t,z)}{\partial z^2} = \psi_i(t,z) + \frac{\partial u_i(t,z)}{\partial t} + G(t) \quad (3)$$

其中: $\psi_i(t,z) = \beta_{1i}\beta_{2i} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u_i(t,z) \exp[-\beta_{2i}(t-\tau)] d\tau$; $C_{vi} = \frac{k_{vi}E_{0i}}{\gamma_w}$; $\beta_{1i} = \frac{E_{0i}}{E_{1i}}$; $\beta_{2i} = \frac{E_{1i}}{\eta_i}$; $G(t) = -\beta_{1i}\beta_{2i}q + \beta_{1i}\beta_{2i}^2 \int_0^t e^{-\beta_{2i}(t-\tau)} d\tau$ 。

1.2 定解条件

假设模型上、下边界均为连续排水边界,可得固结边界条件为:

$$\begin{cases} u(t,0) = qe^{-bt}, \\ u(t,H) = qe^{-ct} \end{cases} \quad (4)$$

其中: b 、 c 分别为上、下边界的界面参数。

此外,在两层土交界面处应满足孔压和流量连续条件,即

$$k_{v1} \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=H_1} = k_{v2} \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=H_1} \quad (5)$$

$$u_1(t,z) \Big|_{z=H_1} = u_2(t,z) \Big|_{z=H_1} \quad (6)$$

假定荷载瞬时施加且地基附加应力均匀分布,则固结初始条件为:

$$u(0,z) = q \quad (7)$$

2 解答与验证

2.1 问题的解答

边界转换法是针对固结问题提出的一种新的分析处理方法,该方法是将所涉及的混合型边界

条件转化为更易理解和操作的统一边界条件^[33]。根据边界转换法,设第 i 层土边界处孔压为:

$$\begin{cases} u_i \Big|_{z=z_{i-1}} = f_{i-1}(t), \\ u_i \Big|_{z=z_i} = f_i(t) \end{cases} \quad (8)$$

其中, z_{i-1} 、 z_i 分别为第 i 层土上、下面坐标, $i=1, 2$ 。可以看出,处理之后层间孔压连续性条件 $u_1 \Big|_{z=z_1} = u_2 \Big|_{z=z_2}$ 已然满足。

基于初始条件,对方程(3)~(5)和式(8)进行 Laplace 变换得:

$$C_{vi} \frac{\partial^2 \bar{u}_i(s,z)}{\partial z^2} = D_i(\bar{u}_i - \bar{q}) \quad (9)$$

其中

$$D_i = (s^2 + \beta_{2i}s + \beta_{1i}\beta_{2i}s)/(s + \beta_{2i}) \quad (10)$$

$$\bar{u}(s,z) \Big|_{z=0} = \begin{cases} \int_0^\infty qe^{-st} e^{-bt} dt, \\ \int_0^\infty qe^{-st} e^{-ct} dt \end{cases} \quad (11)$$

$$k_{v1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} \Big|_{z=H_1} = k_{v2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} \Big|_{z=H_1} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_i \Big|_{z=z_{i-1}} = \tilde{f}_{i-1}, \\ \bar{u}_i \Big|_{z=z_i} = \tilde{f}_i \end{cases} \quad (13)$$

控制方程式(9)的通解为:

$$\bar{u}_i = A_{1i} \sinh(\lambda_i z) + A_{2i} \cosh(\lambda_i z) + \bar{q} \quad (14)$$

其中, $\lambda_i = \sqrt{\frac{(s^2 + \beta_{2i}s + \beta_{1i}\beta_{2i}s)}{C_{vi}(s + \beta_{2i})}}$ 。将式(14)代入式(13),即可求出 A_{1i} 和 A_{2i} ,再代入通解可得:

$$\bar{u}_i(z,s) = \bar{q} + \frac{1}{\sinh(\lambda_i(z_i - z_{i-1}))} \left[(f_{i-1} - \bar{q}) \sinh(\lambda_i(z_i - z)) + (f_i - \bar{q}) \sinh(\lambda_i(z - z_{i-1})) \right] \quad (15)$$

把式(15)代入层间连续条件式(12)得:

$$-\tilde{f}_0 + [\cosh(\lambda_1 \Delta z_1) + \eta \cosh(\lambda_2 \Delta z_2)] \tilde{f}_1 - \eta \tilde{f}_2 = 2\bar{q} \sinh^2\left(\frac{\lambda_1 \Delta z_1}{2}\right) + 2\eta \bar{q} \sinh^2\left(\frac{\lambda_2 \Delta z_2}{2}\right) \quad (16)$$

结合边界条件式(11)及式(16),改写成矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & -\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中: $a_1 = \cosh(\lambda_1 \Delta z_1) + \eta \cosh(\lambda_2 \Delta z_2)$; $\eta = \frac{\lambda_2 k_{v2} \sinh(\lambda_1 \Delta z_1)}{\lambda_1 k_{v1} \sinh(\lambda_2 \Delta z_2)}$; $d_0 = \frac{q}{(s+b)}$; $d_2 = \frac{q}{(s+c)}$; $d_1 =$

$$2\bar{q}\sinh^2\left(\frac{\lambda_1\Delta z_1}{2}\right)+2\eta\bar{q}\sinh^2\left(\frac{\lambda_2\Delta z_2}{2}\right)。$$

此外,对式(1)进行 Laplace 变换得:

$$\bar{\epsilon}_i(z,s)=\left(\frac{1}{E_{0i}}+\frac{1}{\eta s+E_{1i}}\right)\left(\frac{q}{s}-\bar{u}(z,s)\right) \quad (18)$$

在区间 $[0,H]$ 内,对式(18)进行关于参数 z 的积分,可得地基土在频域内的沉降表达式,即

$$S(s)=\int_0^{z_1}\epsilon_1(z,s)dz+\int_{z_1}^{z_2}\epsilon_2(z,s)dz \quad (19)$$

至此,土体内部超孔隙水压力和沉降在频域内的解析解得到了解答。

2.2 固结度计算公式

对于数值 Laplace 逆变换,国内外学者提出过许多 Laplace 数值反演方法,Stehfest 法^[34]在对变化平缓的函数计算时快速准确。本文选择采用 Stehfest 法进行 Laplace 反演,其计算表达式为:

$$g(x,t)\approx\frac{\ln 2}{t}\sum_{j=1}^K v_j \bar{g}\left(x,j\frac{\ln 2}{t}\right) \quad (20)$$

其中: $j\frac{\ln 2}{t}$ 代替 Laplace 参数 s ; $\bar{g}(x,s)$ 为 $g(x,t)$ 的

Laplace 变换; v_j 为系数。 v_j 的计算公式如下:

$$v_j=(-1)^{(K/2)+j}\times\sum_{k=(j+1)/2}^{\min(j,K/2)}\frac{k^{K/2}(2k)!}{(K/2-k)!k!(k-1)!(j-k)!(2k-j)!} \quad (21)$$

其中: K 为偶数; k 通过取整函数求得。

为分析土层中多余的孔隙水压力的整个耗散情况,由孔隙压力定义平均固结度,可表示为:

$$U_p(t)=\frac{\int_0^{z_1}[q-u(z_1,t)]dz+\int_{z_1}^{z_2}[q-u(z_2,t)]dz}{\int_0^{z_1}[q-u(z_1,\infty)]dz+\int_{z_1}^{z_2}[q-u(z_2,\infty)]dz}\times 100\% \quad (22)$$

根据式(19)可得双层土的土体总沉降为:

$$S(t)=\int_0^{z_1}\epsilon_1(z,t)dz+\int_{z_1}^{z_2}\epsilon_2(z,t)dz \quad (23)$$

由式(23)可得沉降定义的平均固结度为:

$$U_s(t)=S(t)/S(\infty)\times 100\% \quad (24)$$

2.3 退化验证

文献^[35]给出了基于 Merchant 流变模型单层地基土一维固结黏弹性解,为验证本文解法的正确性,将本文解退化为相应条件下的单层解答。为了便于讨论,本文取 $H_1=H_2=2.5\text{ m}$,将双层地基解退化为单层地基解,算例中其余参数取值见表 1 所列。

表 1 单层地基土模型参数

$k_v/$ (m/s)	E_0/MPa	E_1/MPa	$\eta/$ (Pa·s)	H/m
5×10^{-10}	12	12	1×10^{14}	5

利用编写的计算程序,分别计算由沉降定义的平均固结度 U_s 和孔压定义下的平均固结度 U_p ,相关曲线如图 2 所示。从图 2 可以看出,本文计算结果与已有解答吻合良好,从而验证了本文求解方法的正确性和数学逆变换的有效性。

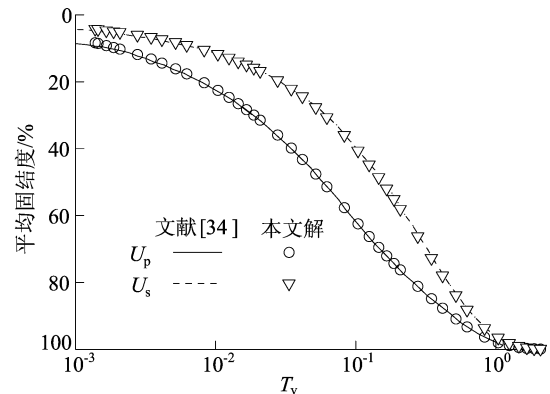


图 2 本文解与已有解的对比

3 算例分析

为探究外荷载作用下连续排水边界双层地基土一维固结特性,基于本文解依次探讨界面参数、黏滞系数 η 和渗透系数 k_v 对软土地基固结特性的影响。参考已有的工程案例^[36]与试验研究^[37],令外荷载 $q=400\text{ kPa}$,界面参数 $b=c=1$,其余参数见表 2 所列。在分析过程中,除所探讨的参数外其余参数保持不变。

表 2 算例分析所需参数

土层 编号	$k_v/$ (10^{-4} m/d)	$E_0/$ MPa	$E_1/$ MPa	$\eta/$ ($\text{kPa}\cdot\text{d}$)	H/m
1	8.64	8	12	1×10^6	8
2	4.32	6	10	1×10^5	4

3.1 固结度

为分析按沉降定义下的平均固结度 U_s 和按孔压定义下的平均固结度 U_p 的区别,基于本文解将 2 种平均固结度的计算结果如图 3 所示。由图 3 可知,在弹性条件下孔压定义的平均固结度 U_p 等于沉降定义的平均固结度 U_s ,而在黏弹性条件下前者总是大于后者,这解释了实际工程中土体变形的发展总是滞后超孔隙水压的消散。此外,该结论表明:在分析不同参数对土体内超孔隙水压消散的影响时,应采用孔压定义的平均固结

度 U_p ;而在分析固结过程中土体的变形特性时,宜按沉降定义的平均固结度 U_s 。

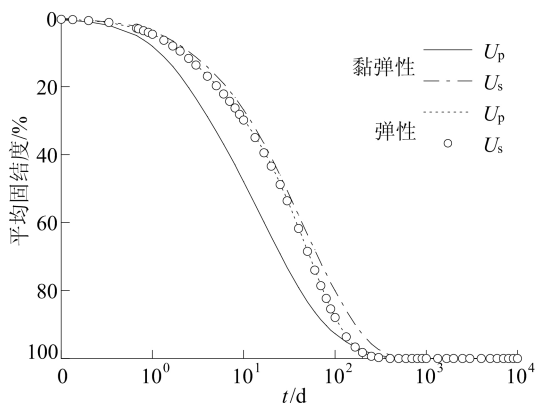


图 3 2 种平均固结度的对比

3.2 界面参数

下界面参数 $c=10^{-3}$ 不变,上边界排水能力不同(上界面参数 b 变化范围为 $10^{-3} \sim 10$)时, $z=4$ m 处超孔隙水压力 u 随时间变化的规律如图 4 所示。

类似地,在相同条件下按沉降定义的固结度 U_s 随 t 变化的规律如图 5 所示。

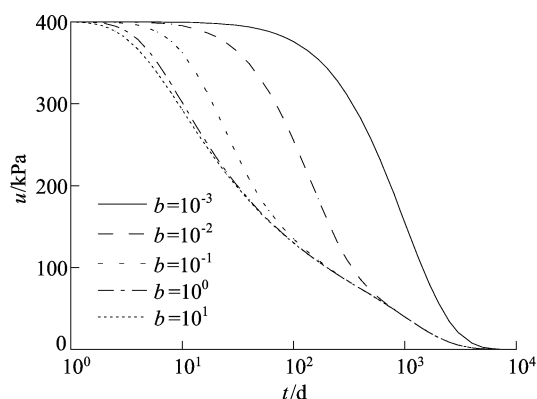


图 4 界面参数 b 对超孔隙水压消散的影响

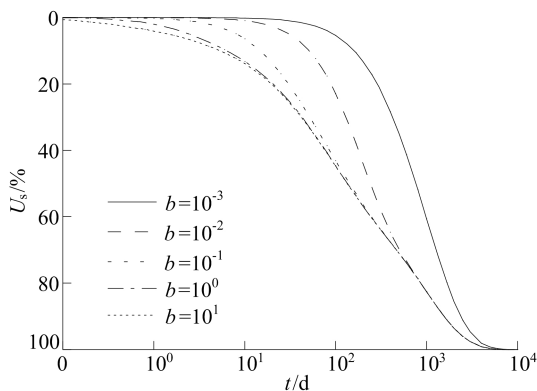


图 5 界面参数 b 对平均固结度的影响

从图 4 可以看出,超孔隙水压消散的速率随

界面参数的增大而加快,但界面参数 b 增大到一定值后,其消散速率逐渐趋于稳定,边界可视为完全透水边界。此外,当按沉降定义的平均固结度 $U_s=90\%$ 时,可认为沉降已趋于稳定^[37]。故而,将土体沉降定义下的平均固结度 U_s 达 90% 的时刻定义为 t_{90} 。从图 5 可以看出:当界面参数 b 小于 10^{-2} 时,对比 $b=10^{-3}$ 时的 t_{90} , $b=10^{-2}$ 时的 t_{90} 缩短了约 34.4% ;而当界面参数 b 大于 10^{-2} 时, U_s 达到 90% 的时间基本相同,均为 1555 d。由此可见,当界面参数 c 保持不变、界面参数 b 小于 10^{-2} 时对沉降稳定的时间影响较大。从而可以得出,传统研究中将地基边界看成完全排水或完全不排水,在固结时间的计算中将造成较大的误差,故而在工程应用中应当选择合适的界面参数。

3.3 黏滞系数

为分析黏滞系数对土体变形的影响,基于本文解对黏滞系数 ($\eta_1=10\eta_2$) 数依次赋予不同的值,分析其对土体变形的影响如图 6 所示。2 种模型在不同时间下地基土各深度处的孔压分布情况如图 7 所示,其中时间节点 t 选取分别为 20 、 80 、 150 d。

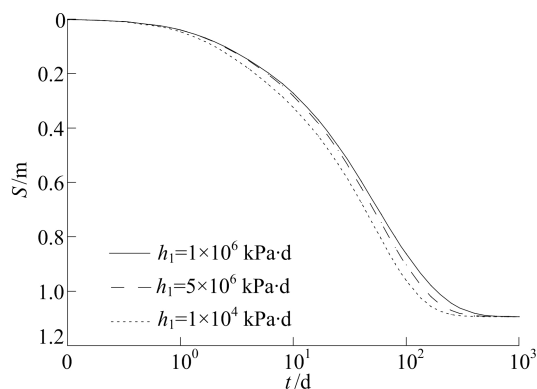


图 6 黏滞系数对沉降的影响

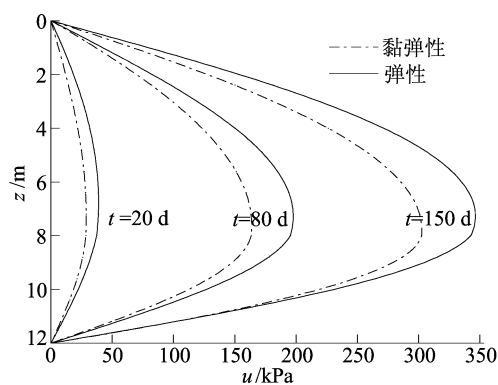


图 7 弹性和黏弹性模型对超孔隙水压消散的影响

由图 6 可知,在其他参数保持不变的前提下,

随着 η 的增大,地基达到沉降稳定所需的时间逐渐增加。即 η 越大,土体的固结沉降发展越缓慢,但在不同黏滞系数下,土体的最终沉降量一致。由图 7 可知,越靠近土层边界处的超孔隙水压力消散的越快,且随着时间的延长超孔隙水压消散速率逐渐减小。随着时间的延长,黏弹性饱和土体超孔隙水压比弹性饱和土体超孔隙水压消散的程度更平缓。

3.4 渗透系数

为探讨渗透系数对土体固结特性的具体影响,基于本文解对渗透系数($k_{v1} = 2k_{v2}$)依次赋予不同的值,影响结果如图 8 所示。从图 8 可以看出,土体 k_v 越大,固结速率越快,达到固结稳定的时间就越短,即其他参数已知且确定的情况下,随着 k_v 不断增大,沉降量达到稳定的时间缩短,加快了地基的固结速率。

此外,由图 6 和图 8 可知:黏滞系数和渗透系数均不影响地基固结的最终沉降量;黏滞系数对固结的影响主要在固结的中后期;渗透系数对固结的影响主要在固结的前中期。

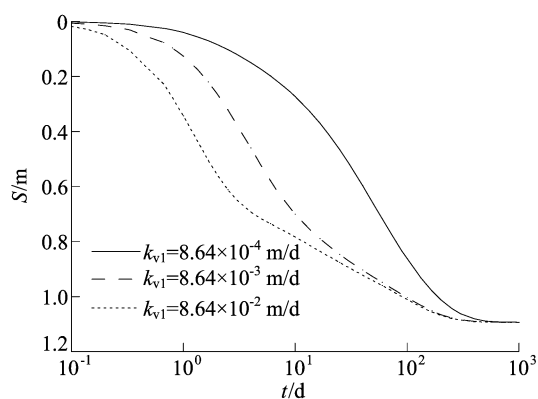


图 8 渗透系数对沉降的影响

4 结 论

本文利用 Merchant 模型描述土体黏弹性,建立了连续排水边界下双层黏弹性地基一维固结模型,利用 Laplace 变换推导出频域内控制方程的解析解,进一步通过 Stehfest 数值逆变换法得到了时域内土体超孔隙水压力、沉降、沉降和超孔隙水压力定义下平均固结度的半解析解,分析相关参数对固结的影响,得到以下结论。

1) 相比于已有的弹性解答,本文黏弹性解表明土体变形总是滞后于超孔隙水压力的消散。此外,界面参数越大,超孔隙水压消散越快,固结速

率越快;当土层下界面参数保持不变,上界面参数小于 10^{-2} 时,界面参数对固结速率影响较大。

2) 黏滞系数越大,土体的固结沉降发展越缓慢,但不影响地基最终沉降量。黏滞系数对固结的影响主要在固结的中后期。

3) 地基固结速率随渗透系数的增大而加快,且渗透系数的影响主要体现在固结前中期。

4) 本文提供的固结模型解答进一步完善了连续排水边界的固结理论体解,对天然软土的沉降计算提供了一定的理论参考。

[参 考 文 献]

- [1] ZAHRI A M, ZAINORABIDIN A. An overview of traditional and non traditional stabilizer for soft soil[C]//IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Bristol: IOP Publishing Ltd., 2019: 012015.
- [2] 徐进,杨伟涛,陈征,等. 水位下降诱发含水层-弱透水层 1 维黏弹性固结分析[J]. 工程科学与技术, 2021, 53(5): 89-97.
- [3] ZHOU S, WANG B, SHAN Y. Review of research on high-speed railway subgrade settlement in soft soil area[J]. Railway Engineering Science, 2020, 28(2): 129-145.
- [4] ASAOKA A. Observational procedure of settlement prediction[J]. Soils and Foundations, 1978, 18(4): 87-101.
- [5] 黄茂松,姚仰平,尹振宇,等. 土的基本特性及本构关系与强度理论研究进展[C]//中国土木工程学会第十二届全国土力学及岩土工程学术大会论文摘要集. 上海:中国土木工程学会土力学及岩土工程分会, 2015: 24-49.
- [6] TERZAGHI K. Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer grundlage[M]. Vienna: Deuticke, 1925.
- [7] GRAY H. Simultaneous consolidation of contiguous layers of unlike compressible soils[J]. Trans ASCE, 1945, 110: 1327-1356.
- [8] SCHIFFMAN R L, STEIN J R. One-dimensional consolidation of layered systems[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970, 96(4): 1499-1504.
- [9] 蔡袁强,梁旭,吴世明. 变荷载下半透水边界成层地基的一维固结[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(8): 855-862.
- [10] 谢康和. 层状土半透水边界一维固结分析[J]. 浙江大学学报(自然科学版), 1996, 30(5): 567-575.
- [11] 谢康和,潘秋元. 变荷载下任意层地基一维固结理论[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(5): 80-85.
- [12] 蔡袁强,梁旭,郑灶锋,等. 半透水边界的粘弹性土层在循环荷载下的一维固结[J]. 土木工程学报, 2003, 36(8): 86-90.
- [13] 李西斌,谢康和,王奎华,等. 双面半透水边界饱和土层在循环荷载作用下的一维粘弹性固结解析解[J]. 工程力学, 2004, 21(5): 103-108, 99.
- [14] 郑灶锋,蔡袁强,徐长节. 变荷载下半透水边界成层黏弹性地基的一维固结分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2005,

- 39(8):1234-1237,1272.
- [15] 梅国雄,夏君,梅岭. 基于不对称连续排水边界的太沙基一维固结方程及其解答[J]. 岩土工程学报,2011,33(1):28-31.
- [16] 冯健雪,陈征,李勇义,等. 连续排水边界条件下考虑自重的地基一维固结分析[J]. 工程力学,2019,36(5):184-191.
- [17] 宗梦繁,叶超,梁荣柱,等. 连续排水边界下考虑指数渗流和土体自重的一维固结分析[J]. 中南大学学报(自然科学版),2021,52(10):3613-3622.
- [18] 陈余,李传勋. 连续排水边界下考虑起始坡降的软黏土固结解[J]. 工程力学,2021,38(9):161-170.
- [19] 李全军,陈余,金丹丹,等. 变荷载下考虑起始水力坡降与连续排水边界的固结解[J]. 土木与环境工程学报(中英文),2023,45(1):122-134.
- [20] 姚宝宽,陈余,冯翠霞,等. 变边界下考虑起始水力坡降的软土固结数值解[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2022,45(12):1656-1662.
- [21] 冯健雪,陈征,李勇义,等. 连续排水边界条件下线性加载地基一维固结解析解[J]. 工程力学,2019,36(6):219-226.
- [22] 李勇义,冯健雪,梅国雄. 连续排水边界下梯形循环荷载作用的一维固结解析解[J]. 工程力学,2019,36(2):134-140.
- [23] SUN M, ZONG M F, MA S J, et al. Analytical solution for one-dimensional consolidation of soil with exponentially time-growing drainage boundary under a ramp load[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018(1):9385615.
- [24] TIAN Y, WU W, JIANG G, et al. One-dimensional consolidation of soil under multistage load based on continuous drainage boundary[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2020, 44(8):1170-1183.
- [25] 苗青,闻敏杰,宗梦繁,等. 连续排水边界下非线性饱和土体一维热固结解析解[J]. 哈尔滨工业大学学报,2023,55(2):143-150.
- [26] 童立红,王珏,郭生根,等. 变荷载下连续排水边界黏弹性地基一维固结性状分析[J]. 岩土力学,2019,40(5):1862-1868.
- [27] 宗梦繁,吴文兵,梅国雄,等. 连续排水边界条件下土体一维流变固结解析解[J]. 工程力学,2019,36(9):79-88.
- [28] WU W, ZONG M, EI-NAGGAR M H, et al. Analytical solution for one-dimensional consolidation of double-layered soil with exponentially time-growing drainage boundary[J]. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2018, 14(10):1-11.
- [29] YANG X, ZONG M, TIAN Y, et al. One-dimensional consolidation of layered soils under ramp load based on continuous drainage boundary[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2021, 45(6):738-752.
- [30] LIU J C, LEI G. One-dimensional consolidation of layered soils with exponentially time-growing drainage boundaries[J]. Computers and Geotechnics, 2013, 54:202-209.
- [31] 杨晓燕,宗梦繁,吴文兵,等. 连续排水边界下双层地基一维非线性固结解析解[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2021,48(3):136-143.
- [32] 余子焯,翟国君,梅国雄,等. 循环荷载作用下连续排水边界双层土一维固结[J]. 华中科技大学学报(自然科学版),2021,49(1):99-105.
- [33] CHEN Z, NI P, CHEN Y, et al. Plane-strain consolidation theory with distributed drainage boundary [J]. Acta Geotechnica, 2020, 15(2):489-508.
- [34] STEHFEST H. Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transforms[J]. Communications of the ACM, 1970, 13(1):47-49.
- [35] 潘晓东,蔡袁强,徐长节,等. 循环荷载下黏弹性饱和土层的一维固结[J]. 岩土力学,2006,27(2):272-276.
- [36] 郭明伟,马欢,杨忠明,等. 常泰长江大桥施工阶段大型沉井基础沉降变形分析[J]. 岩土力学,2021,42(6):1705-1712,1723.
- [37] 周文渊,闪黎,宋新江,等. 等加载速率下软土固结特性试验研究[J]. 南水北调与水利科技,2015,13(4):695-698,712.

(责任编辑 吴亮)