

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2025.12.012

基于间接边界元法的薄壁结构声学灵敏度分析及形状优化设计

申文静, 郑昌军, 梁梦辉

(合肥工业大学 机械工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要:声屏障等非封闭型薄壁结构被广泛应用于交通噪声控制等工程领域,然而结构的特殊性给其散射和辐射声场的仿真分析带来了困难。为此,文章基于间接边界元法提出一种适用于薄壁结构声学灵敏度分析及形状优化设计的方法。为准确高效地计算奇异积分,基于常值单元离散推导出无奇异的声学灵敏度间接边界积分方程;为避免外声场分析时解的非唯一性问题,通过单层势和双层势组合形成基于混合势的灵敏度分析方法,并对组合参数的最优取值进行探讨;在此基础上引入最优化方法,构建薄壁结构的形状优化设计方法,为声屏障降噪性能的提升提供了有效手段。数值算例验证了文章所提方法的有效性和准确性,并证实了其在薄壁结构优化设计中的应用潜力。

关键词:薄壁声学问题;灵敏度分析;形状优化;间接边界元法;解的非唯一性

中图分类号:O242.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2025)12-1657-08

Acoustic sensitivity analysis and shape optimization of thin-body structures using indirect boundary element method

SHEN Wenjing, ZHENG Changjun, LIANG Menghui

(School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: The open thin-body structures, such as noise barriers, have been widely used in traffic noise control and other engineering fields. However, the structural particularity of thin-body structures brings difficulties to the numerical simulation of their scattered and radiated sound fields. Therefore, an effective method for the acoustic sensitivity analysis and shape optimization of thin-body structures is proposed based on the indirect boundary element method (IBEM) in this paper. Firstly, to calculate the singular integrals accurately and efficiently, the non-singular indirect boundary integral equations for acoustic sensitivity is derived based on the constant element discretization. Then, the non-uniqueness difficulty which may be encountered when solving the external field problem is avoided by combining the single-layer and double-layer potentials to obtain a mixed potential-based sensitivity analysis method, and its optimal coupling parameter is also discussed. Additionally, the shape optimization method of thin-body structures is constructed to provide an effective means for improving the noise reduction performance of noise barriers. Numerical examples demonstrate the effectiveness and accuracy of the method proposed in this paper and its potential in the shape optimization of thin-body structures.

Key words: thin-body acoustic problem; sensitivity analysis; shape optimization; indirect boundary element method (IBEM); non-uniqueness of solution

收稿日期:2023-07-31;修回日期:2023-08-31

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12272117)

作者简介:申文静(1998—),女,安徽阜阳人,合肥工业大学硕士生;

郑昌军(1983—),男,安徽合肥人,博士,合肥工业大学教授,博士生导师,通信作者, E-mail: cjzheng@hfut.edu.cn.

薄壁结构被大量应用于实际工程中,如设置在公路和铁路等交通要道旁,用于降低交通噪声的声屏障。这类结构的降噪性能与其形状有很大关系^[1],因此其形状优化设计受到了广泛关注。相比遗传算法等优化方法,基于梯度的优化设计方法在计算效率上具有很大优势^[2]。在基于梯度的优化设计过程中,通过灵敏度分析获得的梯度信息可以为形状优化设计提供准确的优化方向和量化依据^[3-4]。

常用于声学灵敏度分析的数值方法包括有限元法和边界元法。相较于有限元法,边界元法可以自动满足无限远处的声辐射条件,无需对声学域进行截断,适于处理无限域声场问题^[5]。边界元法分为直接边界元法和间接边界元法。直接边界元法要求分析模型是封闭的,为此对于声屏障这类薄壁结构,需要在所有表面划分网格;因声屏障两侧结构面的间距非常小,为避免网格畸形和近奇异积分问题,直接边界元法通常需采用非常小的单元尺寸,这会造成整个模型的单元数量急剧增加^[6]。而对于间接边界元法,其积分方程中的源强同时包含薄壁两侧的信息,因此所分析的模型可以为非封闭的^[7],且单元尺寸只受制于波长大小,单元数量可得到大幅降低,这些特点使间接边界元法更适用于声屏障这类薄壁结构的声场分析。

求解外域声学问题时,边界元法可能会面临解的非唯一性问题^[8]。在直接边界元法中,该问题可通过 Burton-Miller 法^[9-10]来解决,但在间接边界元法中应用 Burton-Miller 法会导致同时存在声压差和振速差 2 个变量,因而仅给定声压或振速边界条件无法直接求解间接边界积分方程。类似于 Burton-Miller 法,混合势方法^[11]通过组合单层势和双层势来克服解的非唯一性问题,但该方法会造成间接边界积分方程中包含超奇异积分。为此,本文采用基于常值单元离散的显式奇异积分消除方法^[12]构造用于声学灵敏度分析的无奇异混合势间接边界积分方程。在此基础上,提出一种高效的声屏障形状优化设计方法,以期可以有效提升声屏障的降噪性能。

1 薄壁结构的声学灵敏度分析

1.1 基于间接边界元法的声学灵敏度分析

对于本文所研究的薄壁结构声学问题,声波在各向同性的均匀介质中传播时需满足如下的 Helmholtz 微分方程:

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) + s(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

其中: ∇^2 为拉普拉斯算子; $p(\mathbf{x})$ 为点 \mathbf{x} 处与时间无关的声压;波数 $k=\omega/c$, ω 为角频率, c 为声速; $s(\mathbf{x})$ 为声源项。

对式(1)利用格林第二等式可得 Helmholtz 边界积分方程(Helmholtz boundary integral equation, HBIE),对 HBIE 进行法向求导可得到法向导数边界积分方程。在这 2 个方程的基础上,可推导出间接边界积分方程^[6]:

$$\frac{1}{2} \hat{p}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + p_{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{p}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \int_{\Gamma} [\bar{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + \bar{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + \frac{\partial p_{\text{in}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3)$$

其中:点 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 分别为场点和源点位置; $\hat{p}=p^++p^-$,为边界 Γ 两侧的声压和, p^+ 和 p^- 如图 1 所示; $\mu=p^- - p^+$ 、 $\sigma=\frac{\partial p^+}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial p^-}{\partial \mathbf{n}}$ 分别为边界两侧的声压及其法向通量差; p_{in} 为入射声压项; $p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为基本解; $q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\frac{\partial p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})}$; $\bar{a}=\frac{\partial a}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}$ 。

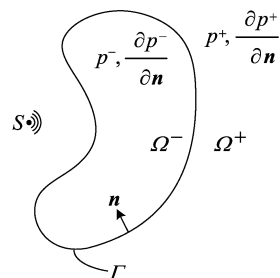


图 1 间接边界元法的求解域示意图

对于二维全空间问题, $p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的形式为:

$$p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^1(kr) \quad (4)$$

对于考虑刚性地面的二维半空间问题,可将方程(2)、方程(3)中的基本解 $p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 替换成如下的半空间基本解:

$$p_{\text{H}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^1(kr) + \frac{i}{4} H_0^1(kr_-) \quad (5)$$

其中: $r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 表示点 \mathbf{x} 与点 \mathbf{y} 之间的欧氏距离; $r_-=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 表示点 \mathbf{x} 与点 \mathbf{y} 关于地面的镜像点 \mathbf{y} 之间的欧氏距离; H_0^1 为 0 阶第一类 Hankel 函数。

通过方程(2)~(5)可以完成薄壁结构的辐射和散射声场分析,但对于本文所关注的薄壁结构

声学灵敏度问题,还需要对方程(2)、方程(3)关于设计变量求导,可得灵敏度计算式为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\hat{p}}(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + \\ & \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \dot{p}_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\hat{p}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = & \int_{\Gamma} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + \\ & \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \frac{\partial \dot{p}_{in}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (7) \end{aligned}$$

其中, \dot{b} 表示变量 b 对设计变量求导。

在进行薄壁结构的声学灵敏度分析时,首先根据已知边界条件,选择方程(2)或方程(3)离散形成线性系统方程,求解得到边界 Γ 上的源强 μ 或 σ ;然后,根据已知边界条件,选择方程(6)或方程(7)离散形成线性系统方程,求解得到边界 Γ 上的源强对设计变量的灵敏度值,即 $\dot{\mu}$ 或 $\dot{\sigma}$;最后,计算结构外待测点 \mathbf{x} 处的声压灵敏度 \dot{p} ,即

$$\begin{aligned} \dot{p}(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + \\ & \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \dot{p}_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (8) \end{aligned}$$

1.2 奇异积分的计算

在利用方程(2)或方程(3)进行声场分析时,核函数 $p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 及其相关函数的积分计算具有奇异性,即存在奇异积分问题。为了更高效、准确地计算奇异积分,本文在常值单元离散的基础上,针对方程(2)和方程(3)推导出如下无奇异间接边界积分方程:

$$\frac{1}{2} \hat{p}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_x} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + \kappa_1 \sigma(\mathbf{x}) + p_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{p}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_x} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + \kappa_2 \mu(\mathbf{x}) + \frac{\partial p_{in}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (10)$$

其中: Γ_x 为点 \mathbf{x} 所在的边界单元; $\Gamma \setminus \Gamma_x$ 表示边界 Γ 除去 Γ_x 后剩余的边界; κ_1 和 κ_2 为系数。对于

二维方程, κ_1 和 κ_2 分别为:

$$\kappa_1 = i \hbar \int_{-1}^1 H_0^{(1)}(k\rho^2) \rho d\xi \quad (11)$$

$$\kappa_2 = \hbar \int_{-1}^1 \left[ik H_1^{(1)}(k\rho^2) - \frac{2}{\pi \rho^2} \right] \frac{1}{\rho} d\xi - \frac{2}{\pi l} \quad (12)$$

其中: l 为线单元长度,如图 2 所示; $\hbar = \sqrt{l/2}/2$; $\rho = (1+\xi)\hbar$, ξ 为无量纲的局部坐标。

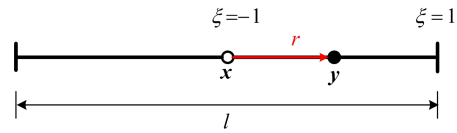


图 2 二维常值线单元示意图

此外,对于灵敏度积分方程(6)和方程(7)同样存在奇异积分问题,且式中的积分需要关于设计变量求导,因此相应的处理更为复杂。为了便于薄壁结构的声学灵敏度分析,本文针对常值单元离散,推导出无奇异间接灵敏度边界积分方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\hat{p}}(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma \setminus \Gamma_x} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_x} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + \\ & \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_x} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \kappa_1 \dot{\sigma}(\mathbf{x}) + \\ & \kappa_3 \sigma(\mathbf{x}) + \dot{p}_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\hat{p}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = & \int_{\Gamma \setminus \Gamma_x} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_x} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) + \\ & \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y})] d\Gamma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_x} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\sigma}(\mathbf{y}) + \\ & q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mu}(\mathbf{y})] d\Gamma + \kappa_2 \dot{\mu}(\mathbf{x}) + \\ & \kappa_4 \mu(\mathbf{x}) + \frac{\partial \dot{p}_{in}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (14) \end{aligned}$$

系数 κ_3 和 κ_4 分别定义为:

$$\kappa_3 = -ik \hbar \gamma_1 \left[\int_{-1}^1 H_1^{(1)}(k\rho^2) \rho^3 d\xi \right] + \kappa_1 \gamma_2 \quad (15)$$

$$\kappa_4 = 2\kappa_2 \gamma_3 + k^2 \kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2 \quad (16)$$

γ_1 、 γ_2 和 γ_3 分别定义为:

$$\gamma_1 = \dot{x}_{i,j} r_{,i} r_{,j} \quad (17)$$

$$\gamma_2 = \dot{x}_{i,i} - \dot{x}_{i,j} n_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \quad (18)$$

$$\gamma_3 = \dot{n}_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) - \dot{x}_{i,j} r_{,i} r_{,j} \quad (19)$$

其中: $\dot{x}_{i,j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}$, x_j 为边界 Γ 上点 \mathbf{x} 的笛卡尔坐标分量; $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial y_i}$, y_i 为边界 Γ 上点 \mathbf{y} 的笛卡尔坐标分量。

标分量; $n_i(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 的笛卡尔分量; 本文使用爱因斯坦求和约定, 如在 $\dot{n}_i n_i$ 中, 重复的指标 i 表示在其取值范围内对 $\dot{n}_i n_i$ 进行累加求和。

1.3 非唯一解问题的处理

在声学间接边界元法中, 单层势的源强定义为薄壁结构边界两侧的速度差, 故令方程(9)和方程(10)中的声压差为 0, 即 $\mu=0$, 可以得到:

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) d\Gamma + \kappa_1 \sigma(\mathbf{x}) + p_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (20)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} \frac{\partial p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \sigma(\mathbf{y}) d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma(\mathbf{x}) + \frac{\partial p_{in}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (21)$$

在声学间接边界元法中, 双层势的源强定义为薄壁结构边界两侧的速度差, 故令方程(9)和方程(10)中的速度差为 0, 即 $\sigma=0$, 可以得到:

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} \frac{\partial p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \mu(\mathbf{y}) d\Gamma - \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}) + p_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (22)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} \frac{\partial^2 p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) \partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \mu(\mathbf{y}) d\Gamma + \kappa_2 \mu(\mathbf{x}) + \frac{\partial p_{in}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (23)$$

当直接使用间接边界积分方程(20)~(23)对外声场进行分析时, 可能会遇到解的非唯一性问题。目前, 解决该问题的方法主要有双表面法^[13-14]、内部阻抗面法^[15]、内部刚性面法^[16]等, 然而, 这些方法存在高计算量和高存储量的不足。为此, 本文在单层势和双层势的基础上, 通过线性叠加构造混合势的方法来克服外声场分析时解的非唯一性问题。所构造的混合势积分方程如下:

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \zeta(\mathbf{y}) d\Gamma - \frac{1}{2} \alpha \zeta(\mathbf{x}) + \kappa_1 \zeta(\mathbf{x}) + p_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (24)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} [\bar{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \bar{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \zeta(\mathbf{y}) d\Gamma + \frac{1}{2} \zeta(\mathbf{x}) + \alpha \kappa_2 \zeta(\mathbf{x}) + \frac{\partial p_{in}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (25)$$

其中: ζ 为混合势源强; α 为叠加系数, 其值应为虚部非 0 的复数。

类似地, 可以构造出如下基于混合势的灵敏度边界积分方程:

$$\dot{p}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \dot{\zeta}(\mathbf{y}) d\Gamma + \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \zeta(\mathbf{y}) d\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma \cup \Gamma_x} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \zeta(\mathbf{y}) d\Gamma - \frac{1}{2} \alpha \dot{\zeta}(\mathbf{x}) + \kappa_1 \dot{\zeta}(\mathbf{x}) + \kappa_3 \zeta(\mathbf{x}) + \dot{p}_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (26)$$

$$\frac{\partial \dot{p}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} [\bar{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \bar{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \dot{\zeta}(\mathbf{y}) d\Gamma + \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \zeta(\mathbf{y}) d\Gamma + \int_{\Gamma \cup \Gamma_x} [\bar{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \bar{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \zeta(\mathbf{y}) d\Gamma + \frac{1}{2} \dot{\zeta}(\mathbf{x}) + \alpha \kappa_2 \dot{\zeta}(\mathbf{x}) + \alpha \kappa_4 \zeta(\mathbf{x}) + \frac{\partial \dot{p}_{in}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (27)$$

基于方程(24)~(27)对薄壁结构进行声学灵敏度分析时, 首先根据已知边界条件, 求解由方程(24)或方程(25)离散形成的线性系统方程, 得到边界 Γ 上的源强 ζ ; 然后, 再根据已知边界条件, 求解由方程(26)或方程(27)离散形成的线性系统方程, 得到边界 Γ 上的源强灵敏度 $\dot{\zeta}$; 最后, 计算薄壁结构外待测点 \mathbf{x} 处的声压灵敏度值:

$$\dot{p}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \dot{\zeta}(\mathbf{y}) d\Gamma + \int_{\Gamma} [\dot{p}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \dot{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \zeta(\mathbf{y}) d\Gamma + \int_{\Gamma} [p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \zeta(\mathbf{y}) d\Gamma + \dot{p}_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (28)$$

适用于声学间接边界元法的混合势方法与适用于声学直接边界元法的 Burton-Miller 方法非常相似。Burton-Miller 方法中的叠加系数 α 已被证实会影响直接边界元法的数值解, 特别是迭代求解器的收敛情况^[17]。为了确定最佳叠加系数, 以利于薄壁结构的声学灵敏度分析, 本文将通过数值算例对比研究叠加系数对间接边界元数值结果的影响。

2 薄壁结构的形状优化设计

为了提高声屏障的降噪性能, 本节在上述声学灵敏度分析方法的基础上, 构造一种薄壁结构截面形状参数的优化设计方法。优化过程中通过改变声屏障的截面形状参数, 使声影区内选定测点处的声压级由 L_p 降低到 L_0 , 因此目标函数可以定义为:

$$f = (L_p - L_0)^2 / 2 \quad (29)$$

式(29)中的目标函数对设计变量的一阶导数为:

$$\dot{f} = (L_p - L_0) \dot{L}_p \quad (30)$$

其中, \dot{L}_p 为测点处的声压级对设计变量的一阶导数, 计算式如下:

$$\dot{L}_p = \frac{10}{\ln 10} \frac{\dot{p}\bar{p} + p\dot{\bar{p}}}{p\bar{p}} \quad (31)$$

其中, \bar{p} 为 p 的复共轭。

根据所设定的目标函数和声屏障截面形状设计变量所受的约束, 可得如下优化模型^[18]:

$$\min f(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in D;$$

$$D = \{\boldsymbol{\theta} \mid c_t(\boldsymbol{\theta}) > 0, t = 1, 2, \dots, m\} \quad (32)$$

其中: $\boldsymbol{\theta}$ 为由设计变量组成的向量; D 为设计变量的可行域; c_t 为关于设计变量的第 t 个约束式; m 为约束不等式的个数。

结合上文所提的声学灵敏度分析方法, 可以构建相应的薄壁结构形状优化设计方法。首先, 利用多元函数最优化方法中的内罚函数法将此有约束优化问题转化为无约束优化问题; 然后, 运用共轭梯度法对转化后的无约束优化问题进行寻优, 在整个寻优过程中, 共轭梯度法需要反复计算灵敏度和目标函数的值。采用上述优化方法可以实现快速的计算, 经过若干迭代可以获得目标函数的最小值, 并获得优化后的设计变量值, 即声屏障截面形状参数的最优值。

3 数值算例

本节首先使用平面波入射无限长刚性圆柱壳算例来验证本文所提出的间接边界元方法(以下简称本文方法)的准确性, 然后通过对声屏障降噪效果的分析, 进一步展示本文方法在工程问题中的应用潜力。算例中的声介质为空气, 其密度为 $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, 声速为 $c = 340 \text{ m/s}$ 。计算程序采用 FORTRAN 90 编写。

3.1 无限长刚性圆柱壳的声散射问题

本算例所分析的问题为无限长刚性圆柱壳的散射声场, 如图 3 所示。

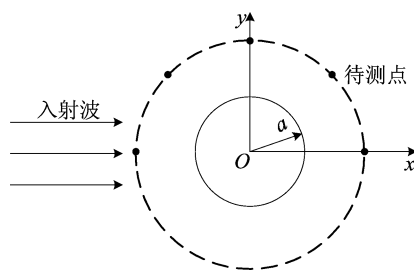


图 3 半径为 a 的无限长刚性圆柱壳声散射

单位幅值平面波自 x 轴正向入射到无限长刚性圆柱壳表面, 圆柱壳截面半径 a 为 1 m , 其中

心 O 位于 $(0, 0)$ 处, 5 个待测点位于以 O 为中心、半径为 2 m 的圆周上, 并且点 O 到 5 个待测点的连线与入射波方向间的夹角分别为 0° 、 45° 、 90° 、 135° 、 180° 。

以圆柱壳的截面半径 a 为设计变量, 待测点声压灵敏度的解析解^[19]为:

$$\frac{\partial p(r, \theta)}{\partial a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \left[\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \right]' \times H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta) \quad (33)$$

其中: $\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2, n > 0$; $[\]'$ 表示对设计变量求导; r 为点 O 到待测点的距离; θ 为点 O 到待测点连线与入射波方向之间的夹角。

在采用本文方法计算待测点处的声压灵敏度时, 圆周被离散为 150 个常值线单元, 混合势的叠加系数 α 分别取 $-i/k$ 和 i/k , 对比分析了 5 个待测点处声压灵敏度的平均相对误差, 如图 4 所示, 此处的平均相对误差 $\bar{\epsilon}_r$ 定义为:

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{1}{5} \sum_{e=1}^5 \frac{|\dot{p}_n^e - \dot{p}_a^e|}{|\dot{p}_a^e|} \quad (34)$$

其中, \dot{p}_n^e 和 \dot{p}_a^e 分别为第 e 个待测点处声压灵敏度的数值解和解析解。

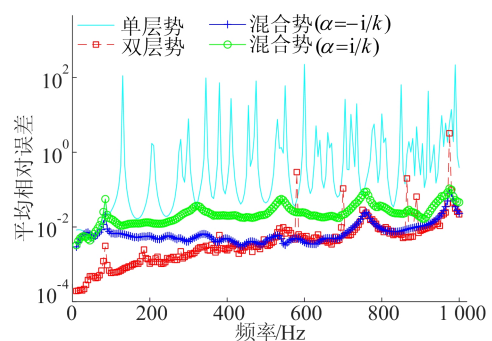


图 4 不同间接边界元法计算结果的对比

从图 4 可以看出: 基于双层势计算得到的灵敏度在整个频率范围内的大部分区域都与解析解吻合地非常好, 但在一些频率附近, 数值结果会出现振荡而与解析解有非常大的偏差; 基于单层势计算得到的灵敏度的平均相对误差在整个频率范围内波动得更为剧烈; 而当采用混合势进行数值分析时, 无论叠加系数 α 取 i/k 还是 $-i/k$, 在整个频率范围内都可以得到正确的灵敏度结果, 但相对而言, 当叠加系数 α 为 $-i/k$ 时, 数值结果的平均相对误差更小。

为了更高效地求解灵敏度分析过程中所形成的线性系统方程, 通常采用诸如 GMRES^[20] 等算法进行迭代求解。然而, 线性系统方程系数矩阵的性态会影响迭代收敛次数, 最终影响迭代求解

的效率。为此,进一步对比混合势叠加系数 α 对迭代求解收敛情况的影响。在灵敏度的分析过程中,需要先后求解关于未知源强和未知源强灵敏度的线性系统方程,虽然二者的系数矩阵相同,但右端已知列向量却不同,因此本文分析了 2 种线性系统方程迭代求解的收敛次数,如图 5 所示。

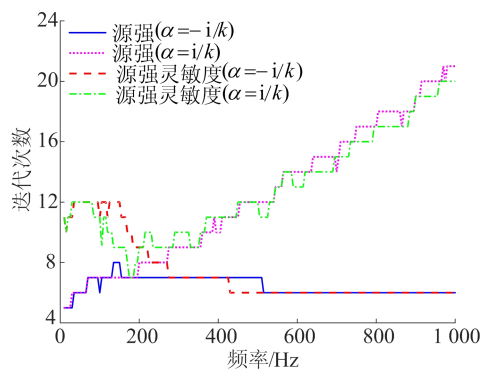


图 5 叠加系数对混合势法迭代次数的影响

从图 5 可以看出:当 α 为 i/k 时,随着频率的增加,计算源强所需要的迭代次数逐渐增加,计算源强灵敏度所需要的迭代次数先减少后增加;当 α 为 $-i/k$ 时,随着频率的增加,计算源强及其灵敏度所需要的迭代次数均先增加后减少并趋于稳定,因此 α 取 $-i/k$ 时更有利于混合势法迭代求解的收敛。需要注意的是,最佳叠加系数 α 的符号与间接边界积分方程中源强的表示形式有关,若规定双层势源强为 $\mu = p^+ - p^-$,则最佳叠加系数 α 取 i/k 更有利于迭代求解。

3.2 声屏障的散射声场分析及形状优化

目前,声屏障作为舒缓交通噪声的重要设施逐渐得到了广泛应用。Y 型声屏障是工程应用中最具有代表性的结构之一,其结构示意图如图 6

所示,其顶端角度参数对其降噪性能具有显著影响^[21]。为了提升 Y 型声屏障的降噪性能,本节首先对其散射声场开展分析,然后进一步对其顶端角度参数进行优化设计。

Y 型声屏障竖直部分高度 h_1 设定为 3 m,整体高度 h_2 设定为 4 m,顶端左分支向左偏离竖直向上方向的角度 θ_1 设定为 45° ,顶端右分支向右偏离竖直向上方向的角度 θ_2 设定为 45° 。以声屏障底部端点位置为原点建立图 6 所示的直角坐标系,单位幅值的单极子声源 S 位于 $(-2, 1)$ m。

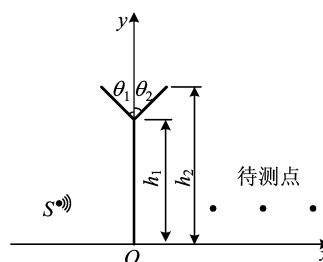


图 6 半空间中 Y 型声屏障示意图

3.2.1 Y 型声屏障的散射声场分析

利用本文方法对声源频率分别为 50、300、500 Hz 时 Y 型声屏障周围区域的声压级分布情况进行分析,结果如图 7 所示,所关注的声场区域范围为 $-5 \text{ m} \leq x \leq 20 \text{ m}$, $0 \text{ m} \leq y \leq 15 \text{ m}$ 。从图 7 可以看出,Y 型声屏障具有很好的降噪效果,且随着频率的升高其降噪性能也会逐渐提升。为了验证分析结果的正确性,本节进一步采用直接边界元法对该声屏障的散射声场进行分析。直接边界元法要求所分析的对象为封闭模型,因此设定声屏障的厚度为 3 mm,并对声屏障的所有表面以及顶端侧面进行网格划分。

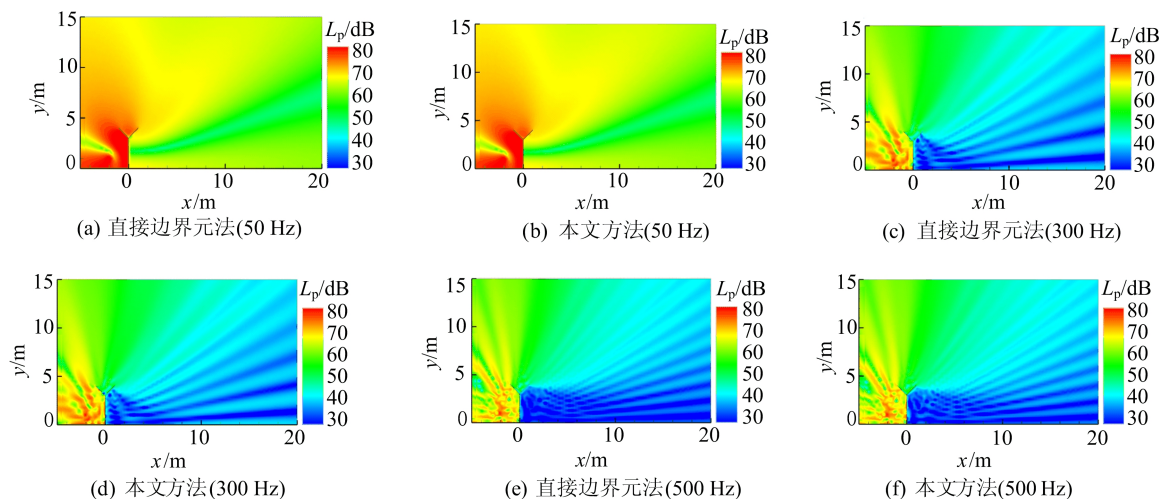


图 7 声压级分布图

为了避免网格畸形和近奇异积分,直接边界元法的单元尺寸设定为 1.5 mm(以保证厚度方向上至少有 2 个单元),此时单元总数为 7 774 个。而本文方法可以将声屏障视为无厚度的非封闭模型,此时单元大小只需满足一个波长 6~10 个单元即可。根据所分析的最高频率对应的波长,采用本文方法仅需要将声屏障模型离散为 58 个常值线单元。

从图 7 可以看出,本文方法的分析结果与直接边界元法的分析结果非常相似,尤其是在频率较低时,然而相较于直接边界元法,因为本文方法所需要的单元数量非常小,所以更适于声屏障这类薄壁结构的声场分析。

利用本文方法分析 Y 型声屏障周围的声压级分布对其顶端形状参数的灵敏度。声源频率设定为 300 Hz,所考察的设计变量为顶端分支的角度 θ_1 和 θ_2 ,与有限差分法(finite difference method, FDM)获得的结果进行对比,结果如图 8、图 9 所示,差分步长取 0.0001° 。

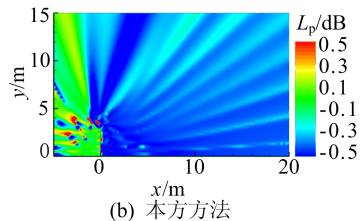
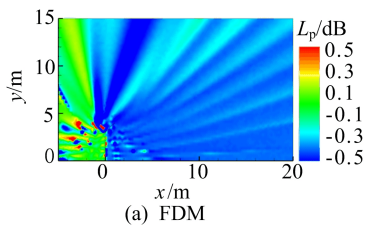


图 8 声压级关于 θ_1 的灵敏度分布

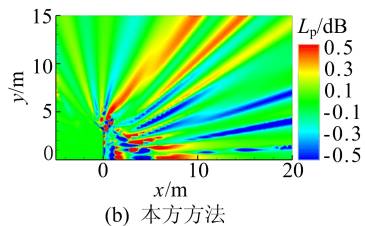
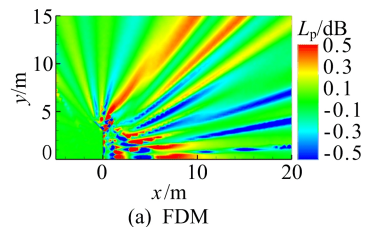


图 9 声压级关于 θ_2 的灵敏度分布

从图 8、图 9 可以看出,本文方法的灵敏度分析结果与 FDM 的分析结果非常接近,且角度 θ_1 和 θ_2 对声屏障周围声压级分布的影响差异较大,因此通过对角度参数 θ_1 和 θ_2 进行优化设计可以提升 Y 型声屏障的降噪性能。

3.2.2 Y 型声屏障的形状优化设计

在上述分析的基础上,本节进一步对 Y 型声屏障的角度参数 θ_1 和 θ_2 进行优化设计。点声源频率设定为 500 Hz,待测点位置为 (1,1) m。设计变量的初始值分别为 $\theta_1 = 42^\circ$ 和 $\theta_2 = 45^\circ$,其所受约束分别为 $0^\circ < \theta_1 < 50^\circ$, $0^\circ < \theta_2 < 50^\circ$ 。内罚函数法初始惩罚因子设定为 1,惩罚因子递减系数设定为 0.1。优化目标设定为待测点处的声压级降低到 15 dB,即 $L_0 = 15$ dB。在优化过程中,待测点处的声压级下降过程如图 10 所示。

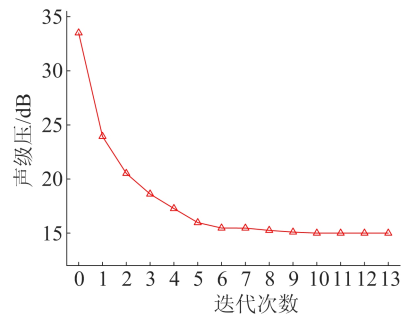


图 10 优化过程中声压级下降折线图

由图 10 可知,经过 11 次迭代后,待测点处的声压级降低到 15 dB 的预设目标,此时 Y 型声屏障顶端左、右分支偏角分别为 28.1° 、 39.6° 。

优化前、后声屏障周围声压级的分布情况如图 11 所示。

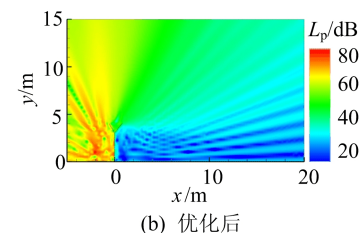
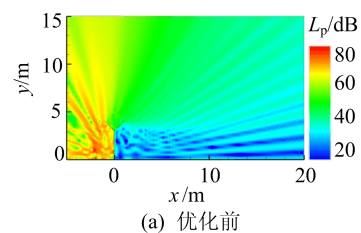


图 11 形状优化前、后声压级对比

从图 11 可以看出,Y 型声屏障经过形状优化

后,声影区的声压级得到了显著降低,由此可见本文方法可以为提升声屏障的降噪性能提供有效手段。

4 结 论

为了更准确、更高效地分析薄壁结构的声学问题,本文基于间接边界元法提出了一种适用于薄壁结构声学灵敏度分析及形状优化设计的数值分析方法。首先,在常值单元离散的基础上,推导出了无奇异的声学灵敏度间接边界积分方程;然后,通过单层势和双层势组合形成基于混合势的灵敏度分析方法,避免了求解外声场问题时可能面临的解的非唯一性问题,并通过数值实验确定了混合势中叠加系数 α 的最佳取值为 $-i/k$;最后,引入基于梯度的最优化方法,构建了一种薄壁结构的形状优化设计方法,为声屏障降噪性能的提升提供了有效手段。数值算例验证了本文方法的有效性和准确性,并证实了其在薄壁结构形状优化设计中的应用潜力。

[参 考 文 献]

- [1] VIJAYA L, CHAITANYA T, RITESH V. Evaluation of noise barriers based on geometries and materials; a review [J]. *Environmental Science and Pollution Research International*, 2021, 29(2): 1729-1745.
- [2] 乔建领, 韩忠华, 宋文萍. 基于代理模型的高效全局低音爆优化设计方法[J]. *航空学报*, 2018, 39(5): 67-80.
- [3] BARONE M R, YANG R J. Boundary integral equations for recovery of design sensitivities in shape optimization [J]. *AIAA Journal*, 1988, 26(5): 589-594.
- [4] ZHANG Z D, RAVEENDRA S T. Sound power sensitivity analysis and design optimization using BEM [J]. *SAE Transactions*, 2003, 112(304): 1627-1632.
- [5] 徐稳稳, 梁梦辉, 郑昌军. 有限水深环境中声辐射预测的快速边界元法[J]. *合肥工业大学学报(自然科学版)*, 2024, 47(11): 1564-1570.
- [6] WU T W. *Boundary element acoustics: fundamentals and computer codes* [M]. Southampton: WIT Press, 2000.
- [7] LIANG M H, ZHANG Y B, ZHENG C J, et al. Solving thin-body acoustic problems over an impedance plane with a fast multipole indirect boundary element method [J]. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, 2022, 30(3): 2240006.
- [8] 郑昌军. 三维结构声学及其敏感度分析的宽频快速多极边界元算法研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2011.
- [9] BURTON A J, MILLER G F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems [J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1971, 323(1553): 201-210.
- [10] ZHENG C J, CHEN H B, GAO H F, et al. Is the Burton-Miller formulation really free of fictitious eigenfrequencies? [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, 59: 43-51.
- [11] KIRKUP S. The boundary element method in acoustics: a survey [J]. *Applied Sciences*, 2019, 9(8): 1642.
- [12] ZHENG C J, MATSUMOTO T, TAKAHASHI T, et al. Explicit evaluation of hypersingular boundary integral equations for acoustic sensitivity analysis based on direct differentiation method [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, 35(11): 1225-1235.
- [13] MOHSEN A, HESHAM M. An efficient method for solving the nonuniqueness problem in acoustic scattering [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2006, 22(11): 1067-1076.
- [14] MOHSEN A, PISCOYA R, OCHMANN M. The application of the dual surface method to treat the nonuniqueness in solving acoustic exterior problems [J]. *Acta Acustica United with Acustica*, 2011, 97(4): 699-707.
- [15] D'AMICO R, NEHER J, WENDER B, et al. On the improvement of the solution accuracy for exterior acoustic problems with BEM and FMBEM [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, 36(7): 1104-1115.
- [16] AMBARISHA V K, GUNDA R, VIJAYAKAR S M. A new indirect formulation to address the non-uniqueness problem in acoustic BEM [C]//INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings, NoiseCon07. Reno NV: Institute of Noise Control Engineering, 2007: 1046-1055.
- [17] MARBURG S. The Burton and Miller method; unlocking another mystery of its coupling parameter [J]. *Journal of Computational Acoustics*, 2016, 24(1): 1550016.
- [18] 解可新. 最优化方法 [M]. 天津: 天津大学出版社, 1997.
- [19] CHEN L L, ZHENG C J, CHEN H B. A wideband FMBEM for 2D acoustic design sensitivity analysis based on direct differentiation method [J]. *Computational Mechanics*, 2013, 52(3): 631-648.
- [20] SAAD Y, SCHULTZ M H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems [J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1986, 7(3): 856-869.
- [21] ISHIZUKA T, FUJIWARA K. Performance of noise barriers with various edge shapes and acoustical conditions [J]. *Applied Acoustics*, 2004, 65(2): 125-141.

(责任编辑 闫杏丽)