

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2025.01.001

# 基于 Delaunay 三角剖分与二次规划的 无人赛车路径规划

张超群, 张代胜, 张一凡

(合肥工业大学 汽车与交通工程学院, 安徽 合肥 230009)

**摘要:**为了使无人驾驶方程式赛车的性能得到充分发挥且获得较快的圈速,文章采用 Delaunay 三角剖分法和二次规划求解方法进行路径规划。对感知系统获得的点云数据进行处理,将其三角剖分并剔除外部三角形,选取三角形内部中点进行插值生成道路中线;将道路中线引入路径优化模型,选取最小曲率路径和最短距离路径 2 个优化方向进行对比,将优化问题转化为二次规划问题求解。通过仿真实验对 2 类优化进行速度规划分析,结果表明最小曲率路径条件下能够获得更快的圈速。在试验赛车上使用最小曲率路径优化算法进行验证,证明该算法能够有效合理地规划出平滑适合赛道的路径,满足赛车比赛要求。

**关键词:**赛车;路径规划;速度规划;三角剖分;二次规划

中图分类号:U469.696

文献标志码:A

文章编号:1003-5060(2025)01-0001-10

## Path planning for driverless racing cars based on Delaunay triangulation and quadratic programming

ZHANG Chaoqun, ZHANG Daisheng, ZHANG Yifan

(School of Automobile and Traffic Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** In the scenario of driverless racing track, in order to give full play to the racing performance and obtain faster lap speed, this paper uses Delaunay triangulation method and quadratic programming (QP) to solve the path planning algorithm. The point cloud data obtained by the perception system is processed and triangulated, the constraint optimization is introduced to eliminate external triangles on the track, and the internal midpoints are selected for interpolation to generate the road centerline. The road centerline is introduced into the path optimization model, and the two optimization directions of the minimum curvature path and the shortest distance path are selected for comparison. The optimization problem is transformed into a QP problem for solution. Through simulation experiments, speed planning analysis was conducted on two types of optimizations, and the results showed that faster lap speeds can be achieved under the minimum curvature path condition. Finally, algorithm validation was conducted on an experimental platform, indicating that the algorithm can effectively and reasonably plan a smooth and suitable path for the racing track, meeting the requirements of racing competitions.

**Key words:** racing car; path planning; speed planning; triangulation; quadratic programming (QP)

中国大学生无人驾驶方程式大赛(formula student autonomous China)是中国大学生方程式系列赛事的一项分赛。无人驾驶方程式赛车需具备感知、决策、规划及控制的功能,以实现稳定、安

全和高效的无人驾驶,其中路径规划是无人驾驶的一项重要技术。目前存在多种路径规划算法:基于图搜索的算法,如 Dijkstra 算法<sup>[1]</sup>、A\* 算法;基于采样路径的算法<sup>[2]</sup>,如随机路线图法(probabilistic road map)

收稿日期:2023-08-07;修回日期:2024-01-16

基金项目:国家重点研发计划资助项目(2021YFE0116600)

作者简介:张超群(1998—),男,山西吕梁人,合肥工业大学硕士生;

张代胜(1962—),男,安徽青阳人,合肥工业大学教授,硕士生导师,通信作者,E-mail:daishengzhang2000@163.com.

bilistic roadmaps, PRM)<sup>[3]</sup>、快速搜索随机树算法 (rapidly-exploring random tress, RRT)<sup>[4]</sup>; 基于人工势场法<sup>[5-6]</sup>、智能优化算法<sup>[7-8]</sup>以及基于强化学习的路径规划算法<sup>[9]</sup>等。

目前在自动驾驶赛车轨迹规划技术发展方面已有很多研究。文献[10]提出一种路径与车速快速协同规划的方法,将时间最优的问题转换为单位时间路径最长的问题;文献[11]对赛车最短单圈时间控制的直接法和间接法进行了比较;文献[12]使用机器学习对自动驾驶赛车最佳轨迹规划和单圈时间模拟进行了研究,相较于传统算法可快速生成轨迹;文献[13]提出一种无人驾驶赛车最优轨迹算法,在目标函数中加入正则项,与赛道中心线为行驶轨迹的路径进行了对比,表明时间最优轨迹能更好地发挥赛车性能;文献[14]使用遥控模型(remote control, RC)赛车,基于模型预测控制方法对赛车轨迹进行优化,并在 RC 赛车上进行了试验验证,证明该方法在赛道局部障碍物及同赛道其他赛车避让情况下具有良好表现;文献[15]提出基于预测模型的路径规划算法,在考虑赛车行驶稳定性组合约束的基础上,添加了边界约束,生成满足赛车行驶要求的路径。

现有赛车路径规划研究方法较多,但应用场景也不相同。对于赛车竞速来说,发挥赛车性能并取得优秀圈速至关重要。为了达到理想的目标,赛道中线的规划并不是最佳的选择,需要进行轨迹优化。通过优化算法可以最大程度地利用赛车的潜力,寻找最佳的行驶路径,并确保在赛道上实现更快的圈速。在比赛的高速循迹项目中,赛道是由红、蓝颜色锥桶定义的未知封闭跑道,要求赛车以最短时间完成比赛圈数。赛车在第 1 圈行驶时建立赛道轨迹地图,生成赛道全局中线;第 2 圈及之后的圈数,对生成轨迹进行进一步优化并且跟踪行驶。综上所述,本文基于大学生方程式赛车比赛场景提出使用 Delaunay 三角剖分和二次规划的路径规划方法,以适应比赛要求。

本文首先使用 Delaunay 三角剖分法进行路径规划生成道路中线,通过优化约束三角剖分消除赛道外部三角形干扰,基于道路内部三角形中点插值拟合形成路径中线;将道路中线及道路环境输入到路径优化模型,选取最小曲率与最短距离路径 2 种优化方式进行对比,将优化问题转化为二次规划问题,并通过仿真实验对比 2 种优化效果;最后在实车上进行算法验证。

## 1 Delaunay 三角剖分道路中线规划

### 1.1 Delaunay 三角剖分简述

三角剖分是计算几何中研究的基本问题,在有限元仿真、光线追踪渲染、计算机图形学等方面应用广泛。三角剖分就是将给定的有限平面点集生成三角形集合,即给定平面点集  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ,生成三角形集合  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ,使得所有三角形的端点构成集合  $P$  且任意 2 个三角形的边不相交。

Delaunay 三角剖分是一种特殊的三角剖分,即存在一种剖分算法,使得所有三角形的外接圆都满足空圆性质的三角剖分。空圆性质即三角形外接圆的内部不含有其他的点。

Delaunay 三角剖分说明示意图如图 1 所示。图 1a 中的三角形  $t_1$  相关联的外接圆内部不包含任何点,该三角剖分属于 Delaunay 三角剖分;而图 1b 中三角形  $t_2$  相关联的外接圆中包含了点  $p_4$ ,该三角剖分不是 Delaunay 三角剖分。

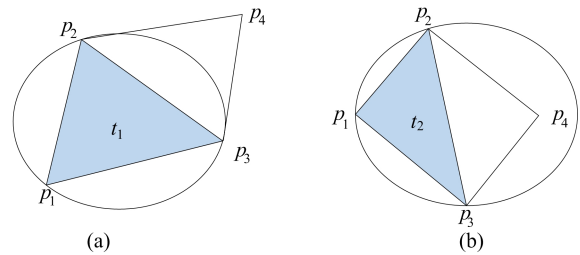


图 1 Delaunay 三角剖分说明示意图

大学生方程式比赛的赛道由不同颜色的锥桶围成,通过将雷达和摄像头采集到的数据进行处理,获知目前赛车的位置和锥桶信息,以此来建立赛道地图。因此在进行路径规划时,需根据锥桶位置信息进行行驶路径的规划。锥桶位置以点坐标呈现,通过对其进行 Delaunay 三角剖分可以快速生成路径。

### 1.2 道路中线规划算法

道路中线算法基于锥桶位置点数据,对锥桶点进行 Delaunay 三角剖分。在剖分过程中,弯道行驶会出现识别多点并且生成道路外部三角形的情况,因此要对三角形约束。在三角剖分完成后,寻找内部中点进行插值生成道路中线路径。

#### 1.2.1 Delaunay 三角剖分

方程式比赛赛道统一设置左侧为红色锥桶,右侧为蓝色锥桶,如图 2 所示,其中  $b_1$  为赛道原点。在对激光雷达得到的点云数据处理后,得到锥桶的位置坐标,将坐标分为赛道左侧  $\{r_1, r_2,$

$\dots, r_N\}$ 和赛道右侧 $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ 两类,逐一进行排列。排列后数据按照左侧、右侧循环排列,即 $\{r_1, b_1; r_2, b_2; \dots; r_N, b_N\}$ 。

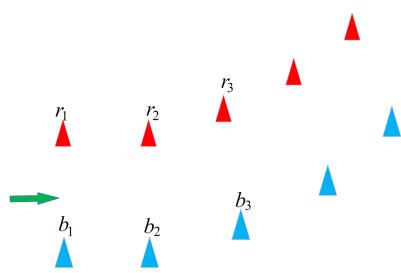


图 2 赛道道路示意图

在实际道路场景中,车辆上的传感器在通过赛道时只会检测到一定数量的红色和蓝色锥桶。因此在创建三角形时建立一个循环,对  $n$  个间隔的锥桶位置进行 Delaunay 三角剖分。循环遍历所有的点,直到完全覆盖整个赛道,从而形成赛道的完整三角剖分图。例如,在  $n=4$  的情况下,将 4 个位置坐标进行三角剖分,结果如图 3 所示。

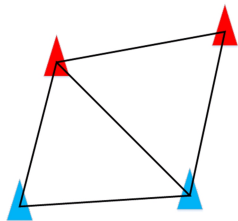


图 3  $n=4$  时三角剖分结果

### 1.2.2 约束优化三角剖分

在三角剖分完成后,会在道路外部也生成三角形,如图 4 所示。

外部三角形会导致生成错误的道路中线,需要增加约束进行删除。约束  $M$  为道路外部边界,将  $M$  设为约束边顶点的集合,视为一个 2 列的矩阵。约束的每一条边包含 2 个点的序列值,定义赛道右侧边界点序列为奇数值,赛道左侧边界点序列为偶数值。约束边的顶点序列值表示(红色边线)如图 5 所示,组成的约束矩阵  $M$  为:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}^T。$$

约束定义好之后,需要将外部的三角形剔除形成新的三角剖分。对剖分形成的三角形进行选择,使用 3 个点的序列号表示生成的三角形,如图 5 中外部三角形 $[1\ 2\ 4]$ 。将所有三角形放入一个  $N$  行 3 列的矩阵  $T$ 。对三角形序列号进行辨别,3 个端点都为奇数或偶数的三角形被剔除,如图 5 中外部三角形 $[2\ 4\ 6]$ 的 3 个端点值均为偶

数,则被剔除。

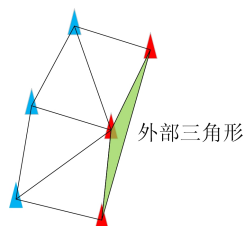


图 4 三角剖分后外部三角形示意图

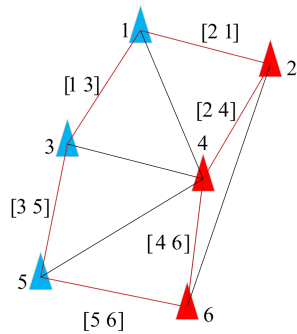


图 5 道路外部约束

### 1.2.3 生成道路中线

删除外部三角形后,寻找内部三角形的中点,在属于道路内部的三角形边 $\{1\ 2; 1\ 4; \dots; (N-1)\ N\}$ 上寻找中点。取得道路中点后,为了保证道路中线具有良好的平滑性和连续性,对中点进行插值,过程如图 6 所示。

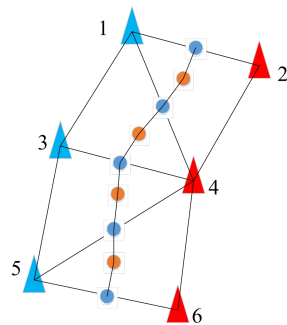


图 6 道路中点提取及插值

## 2 赛道路径优化

对于赛道路径来说,已经取得的道路中线并不是最优路径,赛车轨迹规划应以最短时间为目标进行优化。为了达到上述目标,可以从 2 个方向优化,即对路径曲率优化或获取最短路径。路径优化需满足:① 达到最好的圈速;② 优化算法有良好的稳定性和可靠性;③ 计算时间较短,满足赛车轨迹规划的要求。下面对这 2 种优化思路进行对比。

## 2.1 赛道轨迹几何模型的建立

首先建立赛道模型。提取第 1 节道路中线的信息和道路宽度信息,建立初始点集信息  $T_{\text{track}} = \{X, Y, W_r, W_l\}$ 。其中:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  为道路中线的横坐标集合;  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  为道路中线的纵坐标集合;  $W_r = \{\omega_{r,1}, \omega_{r,2}, \dots, \omega_{r,N}\}$  为对应道路中线点右侧宽度集合;  $W_l = \{\omega_{l,1}, \omega_{l,2}, \dots, \omega_{l,N}\}$  为对应道路中线点左侧宽度集合。新的路径以道路中线为参考线,在参考线的法向方向进行偏移,以赛道宽度和车辆宽度为限制,达到理想位置点。路径点表示法如图 7 所示。

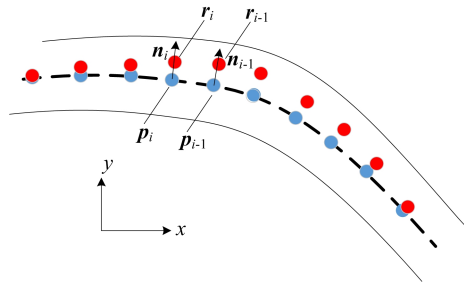


图 7 路径点表示法

第  $i$  个路径点位置向量  $r_i$  可以表示为:

$$r_i = p_i + \alpha_i n_i \quad (1)$$

其中:  $p_i = [x_i \ y_i]^T$  为参考线上的点位置向量;  $n_i$  为参考线点的单位长度法向量;  $\alpha_i$  为将参考线的点沿法向方向朝着赛道边界进行偏移的系数。  $\alpha_i$  取值范围如下:

$$\alpha_i \in \left[ \omega_{l,i} - \frac{\omega}{2} - s, -\omega_{r,i} + \frac{\omega}{2} + s \right] \quad (2)$$

其中:  $\omega_{l,i}, \omega_{r,i}$  分别为第  $i$  个赛道点左、右侧宽度;  $\omega$  为车辆宽度;  $s$  为车身与道路边界的距离。

## 2.2 最小曲率路径优化

最小曲率路径优化的思想是基于第 1 节生成的道路中线,在此基础上进行优化,即通过二次规划求解使得全局路径曲率之和最小。最小曲率路径优化的目的是使得赛车能在轮胎最大向心力限制下以最大速度通过弯道,可以表示为:

$$m a_{y,\max} = m \frac{v_{\max}^2}{\rho} = \mu(mg + F_a) \quad (3)$$

可得:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{a_{y,\max}}{k}} \quad (4)$$

$$v_{\max} = \sqrt{\mu \rho \left( g + \frac{F_a}{m} \right)} \quad (5)$$

其中:  $m$  为车辆的质量;  $a_{y,\max}$  为最大横向加速度;  $\rho$  为曲率半径;  $k$  为曲率;  $\mu$  为路面摩擦系数;  $F_a$  为

空气下压力。

路径生成的目的是通过车辆的控制对其进行跟踪,因此路径应该保证连续性及平滑性。三次样条插值算法在连接点处是光滑连续可导的,且二阶导数是连续的,单个点的值不影响整个曲线,符合汽车运动状态及运动学规律,故选择三次样条插值实现路径生成。三次样条插值多项式为:

$$s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (6)$$

从样条中计算一阶及二阶导数,然后只对  $x$  部分的导数进行描述,  $y$  部分同理。

三阶样条曲线  $x$  及其对  $t$  的一阶导数和二阶导数如下:

$$x_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i \quad (7)$$

$$x_i'(t) = 3a_i t^2 + 2b_i t + c_i \quad (8)$$

$$x_i''(t) = 6a_i t + 2b_i \quad (9)$$

$$t_i(s) = \frac{s - s_i}{\Delta s_i} \quad (10)$$

其中:  $a_i, b_i, c_i, d_i$  为待定系数;  $t$  为每段三次样条曲线的参数;  $s_i$  为每段曲线的起始点;  $t_i$  从  $s_i$  开始,到下一个插值节点结束,  $0 \leq t_i \leq 1$ 。样条插值曲线的系数  $a_i, b_i, c_i, d_i$  可以从线性方程组  $Az = b$  求解得到。因为  $A$  矩阵是满秩的,所以可以求得  $z$  中样条系数的唯一解。

样条曲线上任一点的曲率可以表示为:

$$k_i = \frac{x_i' y_i'' - y_i' x_i''}{(x_i'^2 + y_i'^2)^{3/2}} \quad (11)$$

进行曲率优化时,因为平方项便于数值优化求解,所以使用曲率的平方,即

$$k_i^2 = \frac{x_i'^2 y_i''^2 - 2x_i' x_i'' y_i' y_i'' + x_i''^2 y_i'^2}{(x_i'^2 + y_i'^2)^3} \quad (12)$$

选择将路径上  $N$  个点的曲率平方进行优化求解,曲率平方和如下:

$$\begin{aligned} & \min_{[\alpha_1 \dots \alpha_n]} \sum_{i=1}^n k_i^2(t); \\ \text{s. t. } & \alpha_i \in \left[ \omega_{l,i} - \frac{\omega}{2} - s, -\omega_{r,i} + \frac{\omega}{2} + s \right], \\ & \forall 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (13)$$

将该问题描述成为一个二次规划求解问题,将式(12)代入式(13),得出:

$$\begin{aligned} & \min_{[\alpha_1 \dots \alpha_n]} x''^T P_{xx} x'' + y''^T P_{xy} x'' + y''^T P_{yy} y''; \\ \text{s. t. } & \alpha_i \in \left[ \omega_{l,i} - \frac{\omega}{2} - s, -\omega_{r,i} + \frac{\omega}{2} + s \right], \\ & \forall 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $x'' = [x_1'' \ \dots \ x_N'']^T$ ,  $y'' = [y_1'' \ \dots \ y_N'']^T$  为每个离散点的二阶导数向量。矩阵  $P_{xx}$ 、 $P_{xy}$ 、 $P_{yy}$  可以表示为:

$$\mathbf{P}_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{y_1'^2}{(x_1'^2 + y_1'^2)^3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{y_2'^2}{(x_2'^2 + y_2'^2)^3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{y_N'^2}{(x_N'^2 + y_N'^2)^3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{-2x_1'y_1'}{(x_1'^2 + y_1'^2)^3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-2x_2'y_2'}{(x_2'^2 + y_2'^2)^3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-2x_N'y_N'}{(x_N'^2 + y_N'^2)^3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{x_1'^2}{(x_1'^2 + y_1'^2)^3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{x_2'^2}{(x_2'^2 + y_2'^2)^3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{x_N'^2}{(x_N'^2 + y_N'^2)^3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

此处将道路中线参考点近似地表示为路径点坐标,因为路径点从参考点进行偏移,并且偏移系数  $\alpha$  受到道路宽度和车辆宽度限制,所以  $\mathbf{P}_{xx}$ 、 $\mathbf{P}_{xy}$ 、 $\mathbf{P}_{yy}$  可以看作是常数。

对于样条曲线上曲率平方和的求解来说,求解每个插值点的曲率平方和是比较便捷的,并且对于最后的结果不会有太大影响,因此选择  $t=0$  时的点进行曲率求和。当  $t=0$  时,

$$x_i''(t=0) = 2b_i \quad (18)$$

二阶导数表示中要用到偏移系数  $\alpha$ ,对于每个点的二阶导数可以通过线性方程  $\mathbf{A}z = \mathbf{b}$  得到:

$$\begin{bmatrix} x_1'' & x_2'' & \cdots & x_N'' \end{bmatrix}^T = 2\mathbf{A}_{\text{ex},b}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}_x + \mathbf{M}_x\alpha) = 2\mathbf{A}_{\text{ex},b}\mathbf{A}^{-1} \times \left( \begin{bmatrix} p_{1,x} \\ p_{2,x} \\ 0 \\ 0 \\ p_{2,x} \\ p_{3,x} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ p_{N,x} \\ p_{1,x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{2,x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{2,x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{3,x} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n_{N,x} & 0 \\ n_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \right) \quad (19)$$

整理式(19)可以得出:

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{T}_c\mathbf{q}_x + \mathbf{T}_{n,x}\alpha \quad (20)$$

其中:  $\mathbf{T}_c = 2\mathbf{A}_{\text{ex},b}\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{T}_{n,x} = 2\mathbf{A}_{\text{ex},b}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}_x$ 。将式(19)代入式(14),  $y$  的表达同理,可得:

$$\min_{[\alpha_1 \cdots \alpha_n]} \alpha^T(\mathbf{H}_x + \mathbf{H}_{xy} + \mathbf{H}_y)\alpha + (\mathbf{f}_x + \mathbf{f}_{xy} + \mathbf{f}_y)^T\alpha + C;$$

$$\text{s. t. } \alpha_i \in \left[ \omega_{l,i} - \frac{\omega}{2} - s, -\omega_{r,i} + \frac{\omega}{2} + s \right], \quad \forall 1 \leq i \leq N \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{T}_{n,x}^T \mathbf{P}_{xx} \mathbf{T}_{n,x}, \quad \mathbf{H}_{xy} = \mathbf{T}_{n,x}^T \mathbf{P}_{xy} \mathbf{T}_{n,x},$$

$$\mathbf{H}_y = \mathbf{T}_{n,y}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{T}_{n,y}, \quad \mathbf{f}_x = 2\mathbf{T}_{n,x}^T \mathbf{P}_{xx} \mathbf{T}_c \mathbf{q}_x,$$

$$\mathbf{f}_{xy} = \mathbf{T}_{n,y}^T \mathbf{P}_{xy}^T \mathbf{T}_c \mathbf{q}_x + \mathbf{T}_{n,x}^T \mathbf{P}_{xy} \mathbf{T}_c \mathbf{q}_y,$$

$$\mathbf{f}_y = 2\mathbf{T}_{n,y}^T \mathbf{P}_{yy}^T \mathbf{T}_c \mathbf{q}_y,$$

$$C = \mathbf{q}_x^T \mathbf{T}_c^T \mathbf{P}_{xx} \mathbf{T}_c \mathbf{q}_x + \mathbf{q}_y^T \mathbf{T}_c^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{T}_c \mathbf{q}_y + \mathbf{q}_y^T \mathbf{T}_c^T \mathbf{P}_{xy} \mathbf{T}_c \mathbf{q}_x + \mathbf{q}_x^T \mathbf{T}_c^T \mathbf{P}_{xy} \mathbf{T}_c \mathbf{q}_y.$$

式(21)在忽略常数  $C$  的情况下可以转化成二次规划问题,即

$$\min_{[\alpha_1 \cdots \alpha_n]} \frac{1}{2} \alpha^T \mathbf{H} \alpha + \mathbf{f}^T \alpha; \quad \text{s. t. } \mathbf{E} \alpha \leq k \quad (22)$$

赛车设计最小转弯半径为 3.5 m,则曲率  $k$  值边界为 0.286。对于赛道上的曲率值,可以分为中线参考点的曲率定值  $k_f$  和偏移到赛道边界的可变曲率部分  $k_v$ ,并且满足下列条件:

$$|k_f + k_v| \leq k \quad (23)$$

为了表示  $k_f$  和  $k_v$ ,根据式(11)定义如下:

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} \frac{y_1'}{(x_1'^2 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{y_2'}{(x_2'^2 + y_2'^2)^{\frac{3}{2}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{y_N'}{(x_N'^2 + y_N'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{Q}_y = \begin{bmatrix} \frac{x_1'}{(x_1'^2 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{x_2'}{(x_2'^2 + y_2'^2)^{\frac{3}{2}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{x_N'}{(x_N'^2 + y_N'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

不变曲率可以表示为:

$$k_f = \mathbf{Q}_y \mathbf{T}_c \mathbf{q}_y - \mathbf{Q}_x \mathbf{T}_c \mathbf{q}_x \quad (26)$$

可变曲率可以表示为:

$$k_v = (\mathbf{Q}_y \mathbf{T}_{n,y} - \mathbf{Q}_x \mathbf{T}_{n,x}) \alpha \quad (27)$$

将式(26)、式(27)代入式(22)、式(23),可得:

$$E_k = Q_y T_{n,y} - Q_y T_{n,x} \quad (28)$$

对式(22)求解,可以得出最小曲率路径。

### 2.3 最小距离路径优化

求取最小路径时,由于不涉及轨迹斜率的问题,在这里使用每一线段的长度之和近似轨迹长度之和。通过增加离散点的数目可以有效减小误差问题。

根据赛道轨迹几何模型,规划路径的第  $i$  段长度可以表示为:

$$|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i| = |\Delta \mathbf{r}_{x,i} + \Delta \mathbf{r}_{y,i}| \quad (29)$$

其中,  $\Delta \mathbf{r}_{x,i}$ 、 $\Delta \mathbf{r}_{y,i}$  分别表示规划轨迹第  $i$  段的长度在  $x$  轴和  $y$  轴上的投影向量。将这 2 个变量转化为偏移系数  $\alpha$  的函数,即

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_{x,i} &= \mathbf{x}_{p,i+1} - \mathbf{x}_{p,i} + \alpha_{i+1} \mathbf{x}_{n,i+1} - \alpha_i \mathbf{x}_{n,i} = \\ & [\mathbf{x}_{n,i+1} - \mathbf{x}_{n,i}] \begin{bmatrix} \alpha_{i+1} \\ \alpha_i \end{bmatrix} + \Delta \mathbf{x}_{p,i}, \\ \Delta \mathbf{r}_{y,i} &= \mathbf{y}_{p,i+1} - \mathbf{y}_{p,i} + \alpha_{i+1} \mathbf{y}_{n,i+1} - \alpha_i \mathbf{y}_{n,i} = \\ & [\mathbf{y}_{n,i+1} - \mathbf{y}_{n,i}] \begin{bmatrix} \alpha_{i+1} \\ \alpha_i \end{bmatrix} + \Delta \mathbf{y}_{p,i} \end{aligned} \quad (30)$$

其中:  $\mathbf{x}_{p,i}$  为  $p_i$  的  $x$  坐标向量,其他同理;  $\mathbf{x}_{n,i}$  为  $p_i$  处  $n_i$  的  $x$  分量,其他同理。向量  $[\alpha_{i+1} \quad \alpha_i]^T$  可以表示为  $\alpha$ ,将轨迹的长度进行平方求和,可得:

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{i=1}^N (\Delta \mathbf{r}_{x,i}^T \Delta \mathbf{r}_{x,i} + \Delta \mathbf{r}_{y,i}^T \Delta \mathbf{r}_{y,i}) = \\ & \sum_{i=1}^N (\alpha^T \mathbf{H}_{S,i} \alpha + \mathbf{B}_{S,i} \alpha) + C \end{aligned} \quad (31)$$

式(31)使用适当的提取矩阵可以将轨迹长度的平方和表示为自变向量  $\alpha$  的函数,即

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{i=1}^N (\alpha^T \mathbf{E}_i^T \mathbf{H}_{S,i} \mathbf{E}_i \alpha + \mathbf{B}_{S,i} \mathbf{E}_i \alpha) + C = \\ & \alpha^T \mathbf{H}_S \alpha + \mathbf{B}_S \alpha + C \end{aligned} \quad (32)$$

式(32)将最短路径求和转化为二次规划问题,可以求得最优解。

## 3 仿真试验分析

为了验证所提算法的可行性,建立仿真赛道,在 MATLAB 中搭建路径规划仿真。首先验证使用 Delaunay 三角剖分法生成路径中线的效果,再对基于中线的最小曲率路径和最短距离路径进行仿真试验,对比仿真结果。

### 3.1 仿真模型设置

建立仿真赛道进行路径规划仿真,仿真赛道应包含长短直道、左右弯道、大小弯道、连续组合弯道等场景。仿真环境中给与道路两侧锥桶坐标数据,道路左侧为红色锥桶,右侧为蓝色锥桶,便

于赛道中线规划,赛道设计如图 8 所示。

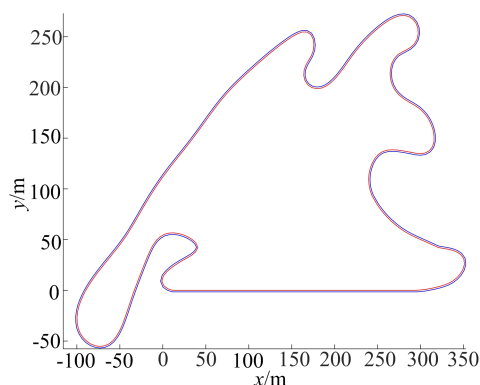


图 8 赛道设计模型示意图

针对大学生方程式赛车展开轨迹规划,车辆相关参数及物理约束见表 1 所列。表 1 中:  $m$  为赛车质量;  $a_{\max}$  为赛车最大加速度;  $a_{\min}$  为赛车最大减速度;  $a_1$  为赛车侧向加速度;  $\mu$  为路面附着系数;  $v_{\max}$  为赛车最大速度;  $\tau$  为车辆宽度;  $s$  为车身与道路边界距离。

表 1 车辆参数及物理约束

参数	数值	参数	数值
$m/\text{kg}$	230	$\mu$	0.8
$a_{\max}/(\text{m}/\text{s}^2)$	8	$v_{\max}/(\text{km}/\text{h})$	120
$a_{\min}/(\text{m}/\text{s}^2)$	-7	$\tau/\text{m}$	1.2
$a_1/(\text{m}/\text{s}^2)$	3	$s/\text{m}$	0.1

### 3.2 道路中线生成仿真

利用 Delaunay 三角剖分法生成赛道中线,根据给定赛道红、蓝锥桶位置坐标进行仿真。仿真中建立一个循环,对  $n=16$  个间隔的椎体位置进行 Delaunay 三角剖分。

赛道局部初始三角剖分的图像如图 9 所示。从图 9 可以看出三角形在赛道外部生成的情况。

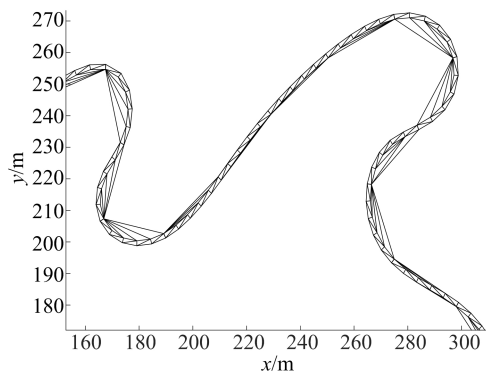


图 9 初始三角剖分示意图

通过约束优化去除外部三角形,结果如图 10 所示。

从图 10 可以看出,在赛道同一位置的三角剖分已经全部位于赛道内部。可知约束优化的作用是有效的。

对赛道三角剖分完成后,寻找道路中点进行插值,拟合形成赛道中线,选取其中 4 段路径,如图 11 所示。

图 11 中红色线即为赛道中线,可以看出整个道路中线规划较为平滑,满足要求。

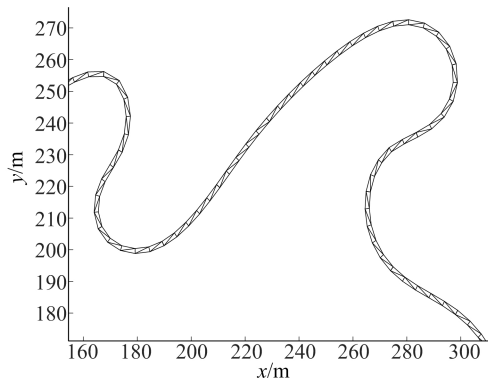


图 10 局部约束三角剖分示意图

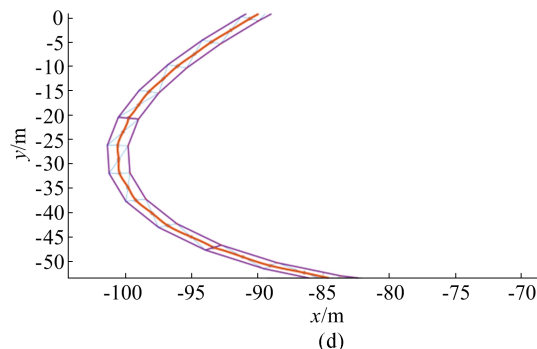
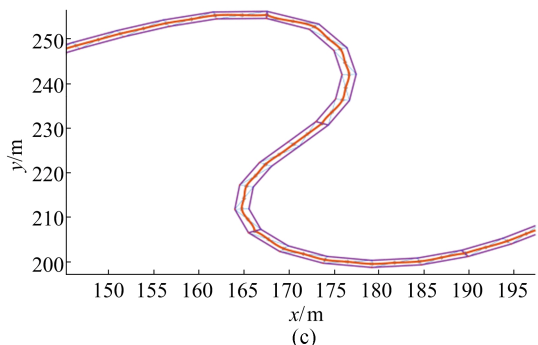
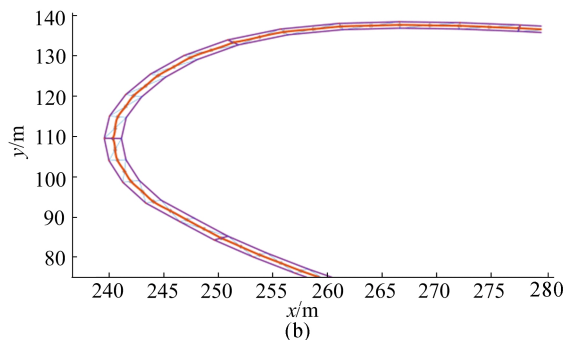
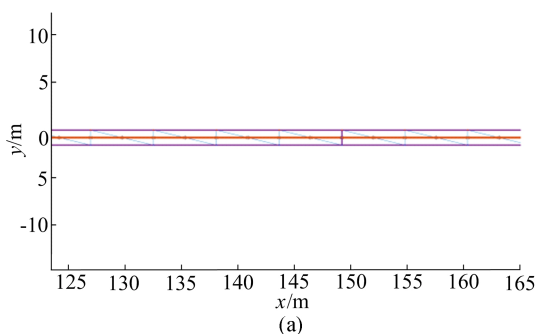


图 11 赛道路径中线规划

### 3.3 优化路径仿真

获取赛道中线后,根据比赛要求获得道路宽度信息,即可建立初始点集信息  $T_{\text{track}} = \{X, Y, W_r, W_l\}$ 。将信息输入最小曲率路径和最短距离路径计算中,获得优化路径,如图 12 所示。

从局部最小曲率路径的表现可以看出:在进入弯道前,路径靠近弯道外侧;进入弯道后,路径贴合弯道内侧;出弯后,继续靠近弯道外侧。这种路径优化保证了较大的转弯半径,允许赛车以较高的速度安全通过弯道。

对整个路径进行速度验证,检测优化路径下的圈速效果。最小曲率路径行驶下的速度云图如图 13 所示,得出最后圈速为 137.08 s。

同样,获取相同道路数据进行最短距离路径的仿真,最短距离路径优化结果如图 14 所示。

从图 14 可以看出,路径主要沿着弯道弯心处行驶,可以保证赛车在赛道上以最小距离跑完全程。

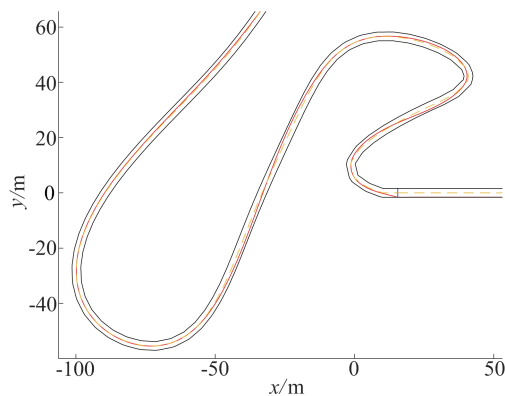


图 12 最小曲率路径规划

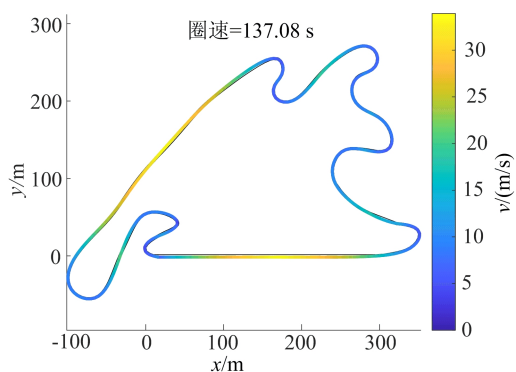


图 13 最小曲率路径速度

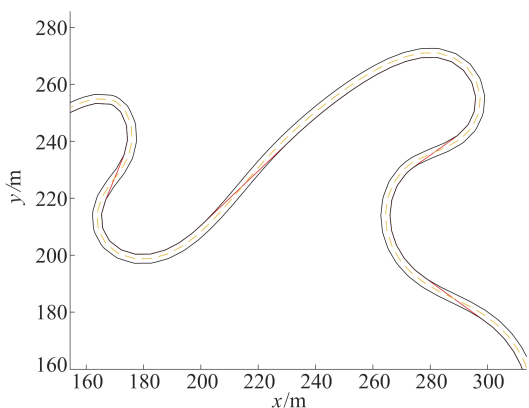


图 14 最短距离路径规划

对最短距离路径进行速度仿真,结果如图 15 所示。从图 15 可以看出,最终圈速为 183.53 s。

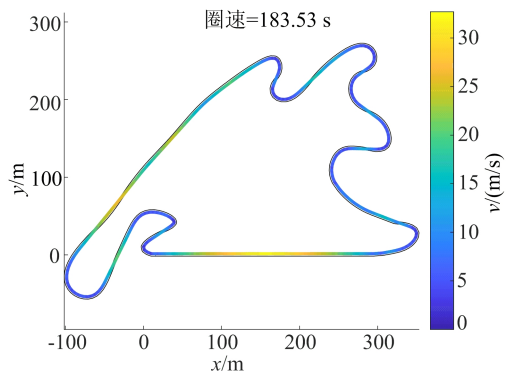


图 15 最短距离路径速度

对比图 13 与图 15 可知,最短距离路径的圈速比最小曲率路径的时间更长,说明最小曲率路径更加适合赛车在赛道上行驶。

最小曲率路径与最短距离路径的速度规划结果对比如图 16 所示。

从图 16 可以看出:最短距离路径在进入弯道和弯道内部的速度较小,且其加减速较为频繁,导致动力损失较大,整体上速度较慢;相比之下,最小曲率路径能够实现更大的转弯半径,从而达到

更高的车速,因此用时更短。

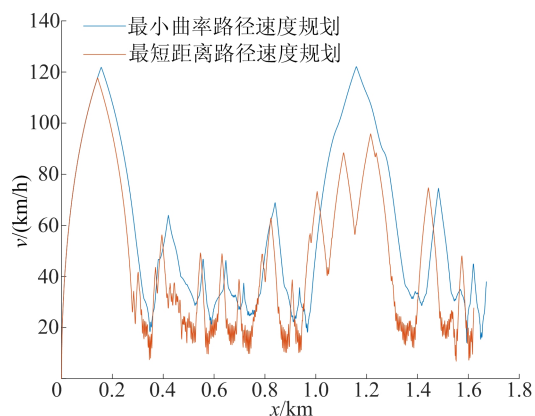


图 16 赛道速度规划对比

### 4 实车验证试验

为验证 Delaunay 三角剖分路径中线与二次规划路径优化算法的有效性与实用性,使用无人驾驶赛车进行路径规划实车试验。

实车无人驾驶系统分为上、下 2 层。其中:上层使用工控机,接收包括雷达、摄像头及惯性导航等传感器信息并进行处理,完成建图、路径规划及跟踪控制部分;下层使用华海 U2 控制器,接收工控机指令及车身部件开关量,控制赛车转向、制动及电机输出等部分。无人驾驶赛车实车如图 17 所示。

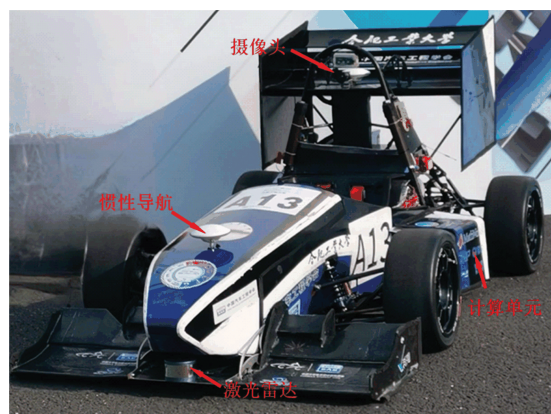


图 17 无人驾驶试验赛车

由于场地限制及安全考虑,试验选取校教学楼广场进行场地搭建。赛道由红、蓝两色锥桶摆放而成,测试赛道最小宽度为 3 m,锥桶间隔为 5 m。赛道整体长度约为 50 m,包括直线、右转和左转部分,其中直线段长度为 20 m,右转部分转弯半径为 8 m,左转部分转弯半径为 6 m。利用

实车试验过程将 Delaunay 三角剖分算法与最小曲率路径规划算法进行对比验证。

实车试验验证场景如图 18 所示,包含 3 个视角,即左上为计算平台实时窗口,左下为车载摄像头记录窗口,右侧为车外视角。

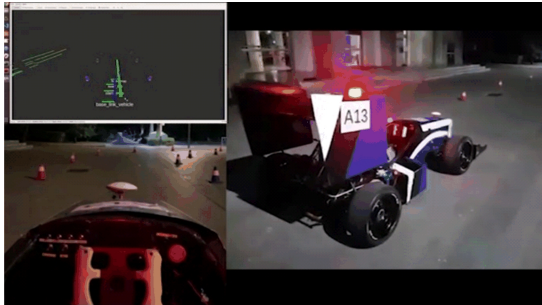
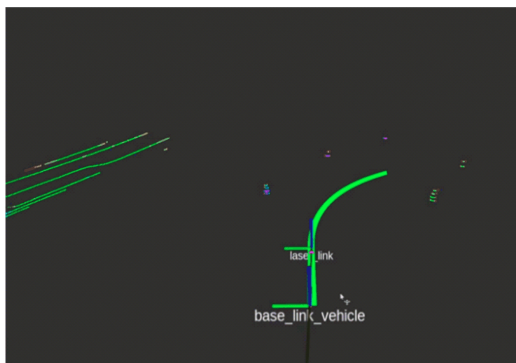


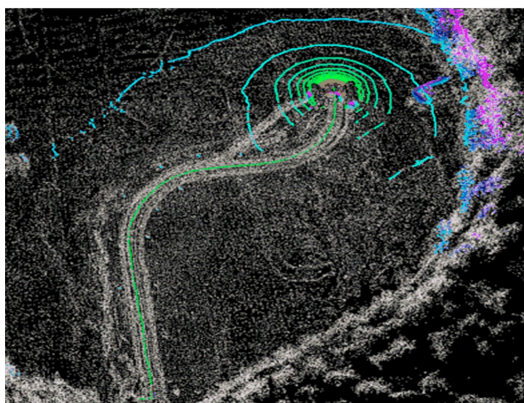
图 18 实车试验场景

实际场景下的试验赛车路径规划实时图像如图 19 所示。

从图 19 可以看出,整体路径光滑可行,规划路径具有由弯道外侧到内侧的趋势,并且路径规划限制在赛道宽度与车辆宽度之内。



(a) 右转局部路径规划



(b) 整体路径规划

图 19 实车试验路径规划

率输出路径的曲率对比如图 20 所示。

从图 20 可以看出:在第 1 个弯道处,未优化中线路径曲率最大值为  $0.145 \text{ m}^{-1}$ ,而最小曲率路径曲率最大值为  $0.124 \text{ m}^{-1}$ ,下降  $14.48\%$ ;在第 2 个弯道处,未优化中线路径曲率最大值为  $0.171 \text{ m}^{-1}$ ,而最小曲率路径的曲率最大值为  $0.139 \text{ m}^{-1}$ ,下降  $18.71\%$ 。这表明优化后的路径曲率能够维持在较低水平。

未优化中线输出路径与优化后最小曲率输出路径下的速度对比如图 21 所示。

由图 21 可知:在未优化中线路径情况下,完成既定试验赛道时间为  $23.35 \text{ s}$ ;而在最小曲率路径情况下,完成既定试验赛道时间仅为  $17.98 \text{ s}$ 。

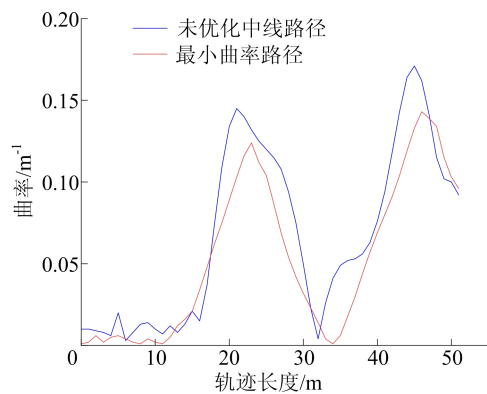


图 20 2 种路径下的曲率对比

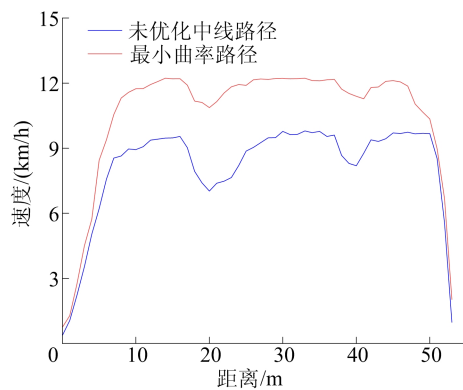


图 21 2 种路径下的速度对比

因为试验中输出功率的限制,赛车整体速度不高,并且在优化路径情况下速度限制阈值提高,所以优化后整体速度高于中线路径速度。因此对比在弯道处的速度下降值,最小曲率路径速度在第 1 个弯道处速度下降了  $11\%$ ;而中线路径速度在第 1 个弯道处速度下降了  $26.41\%$ ,可知最小曲率路径速度下降明显小于中线路径速度,整体速度变化较小。

未优化的赛道中线输出路径与优化的最小曲

(下转第 49 页)

- [10] DEJDAR P, MUNSTER P, HORVATH T. High-speed data acquisition and signal processing using cost effective arm+fpga processors[C]//International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP). [S. l.]: IEEE, 2019: 593-596.
- [11] NEUHAUS L, METZDORFF R, CHUA S, et al. PyRPL (python red pitaya lockbox): an open-source software package for FPGA-controlled quantum optics experiments [C]//2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC). [S. l.]: IEEE, 2017: 1.
- [12] WANG Z, SHI X, WANG W, et al. High-performance digital lock-in amplifier module based on an open-source red pitaya platform: implementation and applications[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022, 72: 1-14.
- [13] STIMPSON G A, SKILBECK M S, PATEL R L, et al. An open-source high-frequency lock-in amplifier[J]. Review of Scientific Instruments, 2019, 90(9): 094701.
- [14] ZHOU F, SONG S, DENG Y, et al. Mixed-signal data acquisition system for optically detected magnetic resonance of solid-state spins[J]. Review of Scientific Instruments, 2021, 92(11): 114702.
- [15] OFEK N, PETRENKO A, HEERES R, et al. Extending the lifetime of a quantum bit with error correction in superconducting circuits [J]. Nature, 2016, 536 ( 7617 ): 441-445.

(责任编辑 胡亚敏)

(上接第 9 页)

## 5 结 论

1) 本文基于大学生无人驾驶赛车,结合具体赛道应用场景,使用优化约束的 Delaunay 三角剖分法,生成连续的赛道中线路径,为后期路径优化提供支持。

2) 基于二次规划方法,选取最小曲率路径和最短距离路径 2 个优化方向,对比 2 种优化算法在仿真目标试验赛道上的圈速,结果表明最小曲率路径圈速比最短距离路径圈速提高 25.31%,且最小曲率路径优化方向在弯道处加减速频率低,动力损失少,能够更好地发挥赛车性能。

3) 实车试验证明,最小曲率路径优化算法在动态环境下赛车能够规划出理想平滑的路径,路径的曲率值下降,且该算法具有有效性和稳定性,能够满足赛车在赛道上的行驶要求。

后续研究将根据速度规划进行动力学跟踪控制研究,进一步优化无人驾驶赛车在赛道上行驶的稳定性。

## [参 考 文 献]

- [1] 吴红波,王英杰,杨肖肖.基于 Dijkstra 算法优化的城市交通路径分析[J].北京交通大学学报,2019,43(4):116-121,130.
- [2] 胡满江,牟斌杰,杨泽宇,等.基于 DBSCAN 与二分法的混合 A\* 路径规划方法[J].汽车工程,2023,45(3):341-349,371.
- [3] 徐玉全.狭窄空间下连续体机器人路径规划方法研究[D].合肥:合肥工业大学,2022.
- [4] 江洪,蒋潇杰.基于 RRT 改进的路径规划算法[J].重庆理工大学学报(自然科学),2021,35(7):10-16,124.
- [5] 孔慧芳,夏露,张倩.基于改进人工势场法的智能车辆避障路径规划[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2023,46(5):583-589.
- [6] 郭泉鹏.基于改进人工势场法的路径规划算法研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2017.
- [7] 朱敏,肖阳,臧昭宇.基于改进蚁群算法的工业机器人路径规划研究[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2023,46(4):463-467,534.
- [8] 张志军,董学平,甘敏.基于优化蚁群算法的 AGV 路径规划研究[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2022,45(7):914-919,924.
- [9] 何启嘉,王启明,李佳璇,等.基于优势竞争网络的转运机器人路径规划[J].清华大学学报(自然科学版),2022,62(11):1751-1757.
- [10] 李荣荣,庄伟超,殷国栋,等.自动驾驶赛车路径与车速协同规划方法[J].机械工程学报,2022,58(10):200-208.
- [11] BIANCO N D, BERTOLAZZI E, BIRAL F, et al. Comparison of direct and indirect methods for minimum lap time optimal control problems[J]. Vehicle System Dynamics, 2019, 57(5): 665-696.
- [12] GARLICK S, BRADLEY A. Real-time optimal trajectory planning for autonomous vehicles and lap time simulation using machine learning [J]. Vehicle System Dynamics, 2022, 60(12): 4269-4289.
- [13] 杨国林,柴天.无人驾驶赛车时间最优轨迹规划[C]//2020 中国汽车工程学会年会论文集(8).北京:机械工业出版社,2020:290-296.
- [14] LINIGER A, DOMAHIDI A, MORARI M. Optimization-based autonomous racing of 1:43 scale RC cars[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2015, 36(5): 628-647.
- [15] 龚国铮,郑少武,钟思祺,等.基于预测模型的无人赛车路径规划算法研究[J].汽车技术,2022(7):32-41.

(责任编辑 胡亚敏)