

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2024.07.018

声波反散射问题的正则化集合卡尔曼方法

郑祥, 陈碟

(电子科技大学 数学科学学院, 四川 成都 611731)

摘要:集合卡尔曼滤波在处理反问题时存在稳定性不够、对初值集合依赖过大等不足,文章将集合卡尔曼滤波算法与正则化思想相结合处理声波反散射问题。在集合卡尔曼滤波框架中加入正则化思想,根据最大后验估计给出滤波过程的具体计算步骤,并进行仿真实验。仿真结果表明,该正则化集合卡尔曼滤波在处理声波反散射问题时滤波精度、稳定性都优于传统的集合卡尔曼滤波。

关键词:反散射问题;贝叶斯理论;集合卡尔曼滤波;亥姆霍兹方程;正则化

中图分类号:O241.8 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2024)07-0971-08

A regularized ensemble Kalman method for acoustic inverse scattering problem

ZHENG Xiang, CHEN Die

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: Ensemble Kalman filter is not stable enough and depends too much on the set of initial values when processing the inverse problem. In this paper, ensemble Kalman filter algorithm and regularization idea are combined and applied to the acoustic inverse scattering problem. The regularization idea is introduced into the frame of ensemble Kalman filter, the specific calculation steps of filtering process are given based on maximum a posteriori estimate, and the numerical experiment is carried out. The numerical results show that the regularized ensemble Kalman filter is superior to the traditional ensemble Kalman filter in terms of filtering accuracy and stability in dealing with acoustic inverse scattering reconstruction.

Key words: inverse scattering problem; Bayes' theorem; ensemble Kalman filter; Helmholtz equation; regularization

数学物理方程中的正问题是指给定微分方程及其解所满足的定解条件,如初值条件、边界条件等,求满足这些条件的解。在实际应用中,常会遇到与正问题相反的情况,即已知微分方程的解及它们所满足的初值条件和边界条件,但微分方程中某些参数是未知的,需要利用解的信息去反求这些参数,这就是数学物理方程中的反问题。声波反散射问题就是一个典型的数学物理反问题,它是近年来一个非常活跃的研究课题,在雷达成像^[1-2]、回波定位^[3-4]、地球物理成像^[5-6]、无损检

测^[7-8]等领域都有广泛的应用,因此研究声波反散射的理论和计算方法具有重要的实际意义。

本文在统计框架下研究声波反散射问题。贝叶斯方法是处理反问题的有力工具,在贝叶斯统计中,未知参数、观测数据和噪声都被视为随机变量,未知参数的先验信息采用先验分布建模,似然函数由噪声分布构造而成,通过未知参数从先验到后验的更新过程可以得到反演解,噪声对求解的影响也可以在反演过程中得到。

本文采用集合卡尔曼滤波探索贝叶斯后验。

收稿日期:2021-07-06;修回日期:2021-07-26

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金资助项目(11701070)

作者简介:郑祥(1997—),男,江西鹰潭人,电子科技大学硕士生;

陈碟(1988—),男,四川成都人,博士,电子科技大学副教授,硕士生导师,通信作者,E-mail:chendie@uestc.edu.cn

自 Evensen 在 1994 年首次提出集合卡尔曼滤波以来^[9],集合卡尔曼滤波在海洋学、水库模型、天气预报等方面有着广泛的应用。近年来,众多学者尝试在标准卡尔曼滤波和集合卡尔曼滤波中加入约束条件,以达到更好的预测效果^[10-11]。一方面,文献[12]将约束条件作为附加项纳入代价函数中,用于获得标准卡尔曼滤波器,再利用拉格朗日乘子法求解约束优化问题,导出基于新的代价函数的迭代过程,这种强制约束的方法被称为投影法,后来被推广到非线性状态约束问题^[13-14]和集合卡尔曼滤波^[15];另一方面,文献[16]通过用约束条件生成观测数据来增强对结果的约束,其中观测数据的方差为 0,由于它们是从约束条件中采样出来的。实验结果表明,投影法和观测数据增强法是等价的^[10]。

本文提出将各种先验知识(如条件约束、平滑性、稀疏性)结合到集合卡尔曼滤波的分析方案中,从而得到一种正则化的集合卡尔曼滤波,该方法将一般正则化项引入集合卡尔曼滤波,通过修正的代价函数推导出正则化集合卡尔曼滤波的迭代过程。首先介绍声波散射正问题的求解;然后给出正则化集合卡尔曼滤波算法的推导;最后进行数值仿真实验,比较正则化集合卡尔曼滤波与传统集合卡尔曼滤波的性能。

1 声波正散射问题的求解

本文考虑在均匀介质中传播的声波遇到有界障碍 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 的散射问题。假设有界障碍 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 为 \mathbf{C}^2 的星形域,定义 $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, |\mathbf{x}| = 1\}$, 给定入射波 $u^i(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \mathbf{d} \in S, \mathbf{d}$ 表示入射波的入射方向, $k = \omega/c, k$ 为波数, ω 为频率, c 为波速。入射波遇到有界障碍 Ω 后发生散射,其散射场满足:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}; \\ u &= u^s + u^i; \\ u &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega; \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中:第 1 式称为 Helmholtz 方程;第 4 式称为 Sommerfeld 辐射条件;总场 $u = u^i + u^s, u^s$ 称为散射波。在无穷远处 u^s 满足如下渐近性质^[17],即

$$u^s(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{\sqrt{|\mathbf{x}|}} \left[u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \right], \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (2)$$

其中: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 表示远场模式的观测方向;

$u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ 为 $u^s(\mathbf{x})$ 的远场模式。

本文研究的反问题为给定 $u^s(\mathbf{x})$ 或 $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ 来反演有界障碍边界 $\partial\Omega$ 。

Helmholtz 方程的基本解为:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^1(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (3)$$

$$S(\varphi(\mathbf{x})) = 2 \int_{\partial\Omega} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4)$$

$$K(\varphi(\mathbf{x})) = 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (5)$$

其中: H_0^1 为第一类零阶汉克尔函数; $S(\varphi(\mathbf{x}))$ 为单层位势算子; $K(\varphi(\mathbf{x}))$ 为双层位势算子。式(4)和式(5)都是 Helmholtz 方程的解,且满足 Sommerfeld 辐射条件。

本文用积分方程求解正问题^[18],已知单层位势算子 $S(\varphi(\mathbf{x}))$ 和双层位势算子 $K(\varphi(\mathbf{x}))$,可以求得 $u^s(\mathbf{x})$,即

$$u^s(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} - i\eta E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Omega \quad (6)$$

其中: $\nu(\mathbf{y})$ 表示 $\partial\Omega$ 的外法线向量; η 为耦合参数,本文取 $\eta = k$ 。

利用式(4)、式(5)以及边界条件式(1)第 3 式可得下边界积分方程为:

$$\varphi + K\varphi - i\eta S\varphi = -2u^i, \text{ on } \partial\Omega \quad (7)$$

其中: S 为单层算子; K 为双层算子。

本文采用 Nyström 方法求解式(7),解得 φ 后代入式(6)求出近场数据 u^s 或代入式(8)求得远场数据 u_∞ 。

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \times$$

$$\int_{\partial\Omega} [k\nu(\mathbf{y})\hat{\mathbf{x}} + \eta] e^{-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), |\hat{\mathbf{x}}| = 1 \quad (8)$$

2 正则化集合卡尔曼滤波算法

本文考虑的反问题可以写为:

$$z = \mathcal{H}[\partial\Omega] + \varepsilon \quad (9)$$

其中: \mathcal{H} 为将边界 $\partial\Omega$ 映射到 u^s 或 u_∞ 的映射算子; z 为 u^s 或 u_∞ 的实际观测值; ε 为噪声,本文假设 $\varepsilon \sim N(0, \mathbf{R}), \mathbf{R}$ 为协方差矩阵。

设 $\partial\Omega$ 为星形区域,在极坐标下,边界 $\partial\Omega$ 可参数化为:

$$\partial\Omega = r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) =$$

$\exp(q(\theta))(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi)$ (10)
其中, $q(\theta) = \ln r(\theta), 0 < r(\theta) < r_{\max}, r_{\max}$ 是一个正常数。特别地, 假设 $q(\theta)$ 有如下形式^[19]:

$$q(\theta) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m=1}^M \frac{a_m \cos(m\theta)}{m^s \sqrt{\pi}} + \frac{b_m \sin(m\theta)}{m^s \sqrt{\pi}} \quad (11)$$

其中, s 为光滑参数。

取 $\mathbf{x} = [a_0 \ a_1 \ b_1 \ \cdots \ a_m \ b_m]^T$, 因此反问题变成:

$$\mathbf{z} = \mathcal{H}[\mathbf{x}] + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim (0, \mathbf{R}) \quad (12)$$

由式(12)可知重构 $\partial\Omega$ 实际上就是重构 \mathbf{x} , 根据贝叶斯定理, 求解反问题相当于求解以观测 \mathbf{z} 为条件的状态 \mathbf{x} 的概率分布 $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$, 而 $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ 满足:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) \propto p(\mathbf{x})p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \quad (13)$$

其中: $p(\mathbf{x})$ 为先验分布; $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ 为当状态 \mathbf{x} 给定时观测 \mathbf{z} 概率的似然函数。

利用最大后验估计^[20] (maximum a posteriori probability estimate, MAP), 假设先验噪声和观测噪声都是高斯噪声^[21], 则有:

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp(-\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{P}}^2) \quad (14)$$

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \propto \exp(-\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbf{R}}^2) = \exp(-\|\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2) \quad (15)$$

其中: $\bar{\mathbf{x}}$ 为先验均值; \mathbf{P}, \mathbf{R} 分别为状态 \mathbf{x} 和观测 \mathbf{z} 的协方差矩阵; 2 范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$ 定义为 $\|\mathbf{V}\|_{\mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V}}$, \mathbf{V} 为向量, \mathbf{A} 为权矩阵。后验分布可写为:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) \propto \exp(-\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{P}}^2 - \|\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2) \quad (16)$$

要使后验分布最大化, 只需要使其负对数最小化^[22], 即

$$\mathbf{x}^{\text{opt}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} M(\mathbf{x}),$$

$$M(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{P}}^2 + \|\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 \quad (17)$$

其中, $M(\mathbf{x})$ 称为代价函数。

在代价函数中引入一般化正则项即 $\|\mathcal{G}[\mathbf{x}]\|_{\mathbf{Q}}^2$, \mathbf{Q} 是与正则化相关的协方差矩阵, 则式(17)变成:

$$\mathbf{x}^{\text{opt}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} M(\mathbf{x}),$$

$$M(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{P}}^2 + \|\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 + \|\mathcal{G}[\mathbf{x}]\|_{\mathbf{Q}}^2,$$

利用一阶导为 0 的方法求极值点, 计算 $\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} = 0$ 时 $M(\mathbf{x})$ 极小值点, 并给出极小值点 \mathbf{x}^{opt} 表示形式。

定理 1 设先验分布和似然函数中的集合为 $\{\bar{\mathbf{x}}_j\}$ 和 $\{\mathbf{z}_j\}, j=1, \dots, J, J$ 为集合中样本的数量,

对每一对集合中的元素 $\bar{\mathbf{x}}_j$ 和 \mathbf{z}_j , 都能找到一个 $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j^a$ 使得代价函数 $M(\mathbf{x}_j)$ 最小, 且满足:

$$\mathbf{x}_j^a = \bar{\mathbf{x}}_j + \mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T)^{-1}(\mathbf{z}_j - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}_j) - \mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P})^{-1}\mathcal{G}'[\bar{\mathbf{x}}_j]\mathbf{Q}^{-1}\mathcal{G}[\bar{\mathbf{x}}_j].$$

证明 任取先验分布和似然函数中的集合为 $\{\bar{\mathbf{x}}_j\}$ 和 $\{\mathbf{z}_j\}, j=1, \dots, J, J$ 为集合中样本的数量, 取任意一对集合中的元素 $\bar{\mathbf{x}}_j$ 和 \mathbf{z}_j 代入代价函数 $M(\mathbf{x})$ 中, 有:

$$M(\mathbf{x}_j) = \|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_j\|_{\mathbf{P}}^2 + \|\mathcal{H}[\mathbf{x}_j] - \mathbf{z}_j\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 + \|\mathcal{G}[\mathbf{x}_j]\|_{\mathbf{Q}}^2 \quad (18)$$

求解 $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j^a$ 使 $M(\mathbf{x}_j)$ 最小, 令 $\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} = 0$ 有:

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_j^a - \bar{\mathbf{x}}_j) + (\mathcal{H}'[\mathbf{x}_j^a])^T \mathbf{R}^{-1}(\mathcal{H}[\mathbf{x}_j^a] - \mathbf{z}_j) + \mathcal{G}'[\mathbf{x}_j^a]^T \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{G}[\mathbf{x}_j^a] = 0 \quad (19)$$

假设 $\mathcal{H}[\mathbf{x}] = \mathbf{H}\mathbf{x}, \mathcal{H}'[\mathbf{x}] = \mathbf{H}$, 由泰勒展开式可得:

$$\mathcal{H}[\mathbf{x}_j^a] \approx \mathcal{H}[\bar{\mathbf{x}}_j] + \mathcal{H}'[\bar{\mathbf{x}}_j](\mathbf{x}_j^a - \bar{\mathbf{x}}_j),$$

$$\mathcal{H}'[\mathbf{x}_j^a] \approx \mathcal{H}'[\bar{\mathbf{x}}_j].$$

对导入的正则化函数 \mathcal{G} 泰勒展开并舍去一阶导数项, 有:

$$\mathcal{G}[\bar{\mathbf{x}}_j] \approx \mathcal{G}[\mathbf{x}_j^a], \mathcal{G}'[\bar{\mathbf{x}}_j] \approx \mathcal{G}'[\mathbf{x}_j^a],$$

则式(19)变成:

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}_j^a - \bar{\mathbf{x}}_j) + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{H}\mathbf{x}_j^a - \mathbf{z}_j + \mathbf{H}(\mathbf{x}_j^a - \bar{\mathbf{x}}_j)] + \mathcal{G}'[\bar{\mathbf{x}}_j]^T \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{G}[\bar{\mathbf{x}}_j] = 0 \quad (20)$$

化简之后可得:

$$\mathbf{x}_j^a = \bar{\mathbf{x}}_j + \mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T)^{-1}(\mathbf{z}_j - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}_j) - \mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P})^{-1}\mathcal{G}'[\bar{\mathbf{x}}_j]^T \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{G}[\bar{\mathbf{x}}_j] \quad (21)$$

正则化集合卡尔曼滤波方法引入 2 种校正方法: ① Kalman 校正, 对应的是代价函数中的 $\|\mathcal{H}[\mathbf{x}] - \mathbf{z}\|_{\mathbf{R}^{-1}}$; ② 正则化校正, 对应的是代价函数中 $\|\mathcal{G}[\mathbf{x}]\|_{\mathbf{Q}}$ 。式(17)中可以添加多个正则项, 每一项都有对应的约束函数和权重协方差矩阵 \mathbf{Q}_P^{-1} , 下标 P 表示正则化的个数。

给定状态向量 $P(\mathbf{x})$, 观测值 \mathbf{z} 和误差协方差矩阵 \mathbf{R} 的先验分布以及约束函数 \mathcal{G} 和协方差矩阵 \mathbf{Q} 的先验分布。正则化集合卡尔曼滤波算法步骤如下:

1) 抽样。根据状态的先验分布, 生成由 J 个样本 $\{\mathbf{x}_i^{(0)}\}_{i=1}^J$ 组成的初始状态向量集合。

2) 预测。对每一个样本, 利用正向算子得到 $\mathcal{H}[\mathbf{x}^{a, i-1}] \mapsto \mathbf{x}^{(i)}$ 。

3) 分析。首先, 计算均值 $\bar{\mathbf{x}}^{(i)}$ 和协方差 $\mathbf{P}^{(i)}$, 即

$$\bar{\mathbf{x}}^{(i)} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{x}_j^{(i)} \quad (22)$$

$$\mathbf{P}^{(i)} = \frac{1}{J-1} \mathbf{X}^{(i)} (\mathbf{X}^{(i)})^T \quad (23)$$

其中, $\mathbf{X}^{(i)} = [(\mathbf{x}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}) \quad (\mathbf{x}_2^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}) \quad \dots \quad (\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)})]$ 。

然后,计算卡尔曼增益矩阵,即

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{H}^T)^{-1} \quad (24)$$

最后,对于每一个样本,更新状态得到 $\mathbf{x}_j^{a,(i)}$,即

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^{a,(i)} &= \mathbf{x}_j^{(i)} + \mathbf{K}^{(i)} (\mathbf{z}_j^{(i)} - \mathbf{H} \mathbf{x}_j^{(i)}) - \\ &\mathbf{P}^{(i)} (\mathbf{I} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}^{(i)})^{-1} \mathcal{G}[\mathbf{x}_j^{(i)}] \mathbf{Q}^{-1} \mathcal{G}[\mathbf{x}_j^{(i)}] \end{aligned} \quad (25)$$

3 Metropolis-Hastings 算法

对于 $\mathbf{x} = [a_0 \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_m \ b_m]^T$, 给定对每个元素赋予初始值, 利用 Metropolis-Hastings 算法进行遍历, 最终得到新的 \mathbf{x} 。取 $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{x}$, 则反问题后验测度的解的分布可以写为:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{Z} \exp(-\psi(\mathbf{x}; \mathbf{z})) \boldsymbol{\mu}_0 \quad (26)$$

其中: $Z = \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-\psi(\mathbf{x}; \mathbf{z})) \boldsymbol{\mu}_0 \mathbf{d}\mathbf{x}$; $\boldsymbol{\mu}_0$ 为先验测度; $\psi(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ 为指标函数, $\psi(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{R}^{-1/2} \{z - \mathcal{H}[\mathbf{x}]\}\|^2$ 。

Metropolis-Hastings 算法步骤如下:

首先,对 \mathbf{x} 中的每一个元素选取初始值, 为了方便起见, 设 $a_0 = a_1 = b_1 = \dots = a_m = b_m = 0$ 。

其次,取 $n = 2, \dots, m$, 则

1) 计算 $q_1(\theta), q_1'(\theta), q_1''(\theta), \bar{q} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J q^{(j)}$;

2) 解正问题式(1)以及求解式(26)中的 $\boldsymbol{\mu}$;

3) 从高斯分布 $N(0, 1)$ 中随机生成 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$, 计算 $\bar{q}_1(\theta), \bar{q}_1'(\theta), \bar{q}_1''(\theta)$, 并计算:

$$q_2 = \sqrt{1 - 2\beta} q_1 + \sqrt{2\beta} \bar{q}_1,$$

$$q_2' = \sqrt{1 - 2\beta} q_1' + \sqrt{2\beta} \bar{q}_1',$$

$$q_2'' = \sqrt{1 - 2\beta} q_1'' + \sqrt{2\beta} \bar{q}_1'';$$

4) 解正问题式(1)以及 $\boldsymbol{\mu}'$;

5) 计算接受率 $\alpha(q_1, q_2) = \min(1, \boldsymbol{\mu}' / \boldsymbol{\mu})$;

6) 取 α , 其中 $\alpha \sim U(0, 1)$, 若 $\alpha < \alpha(q_1, q_2)$, 则取 $q_1(\theta) = q_2(\theta), q_1'(\theta) = q_2'(\theta), q_1''(\theta) = q_2''(\theta)$, 否则舍去。

最后,计算条件均值。

4 数值算例

本文考虑如下障碍:

$$\partial\Omega_{\text{bean}} = \begin{cases} \frac{1 + 0.9\cos\theta + 0.1\sin(2\theta)}{1 + 0.75\cos\theta} \cos\theta, \\ \frac{1 + 0.9\cos\theta + 0.1\sin(2\theta)}{1 + 0.75\cos\theta} \sin\theta \end{cases} \quad (26)$$

$$\partial\Omega_{\text{roundrect}} = \begin{cases} \left[\cos^4\theta + \left(\frac{2}{3}\sin\theta\right)^4 \right]^{-\frac{1}{4}} \cos\theta, \\ \left[\cos^4\theta + \left(\frac{2}{3}\sin\theta\right)^4 \right]^{-\frac{1}{4}} \sin\theta \end{cases} \quad (27)$$

式(26)和式(27)为障碍物 A 和障碍物 B 的表示式, 障碍物 A 和障碍物 B 形状如图 1 所示。

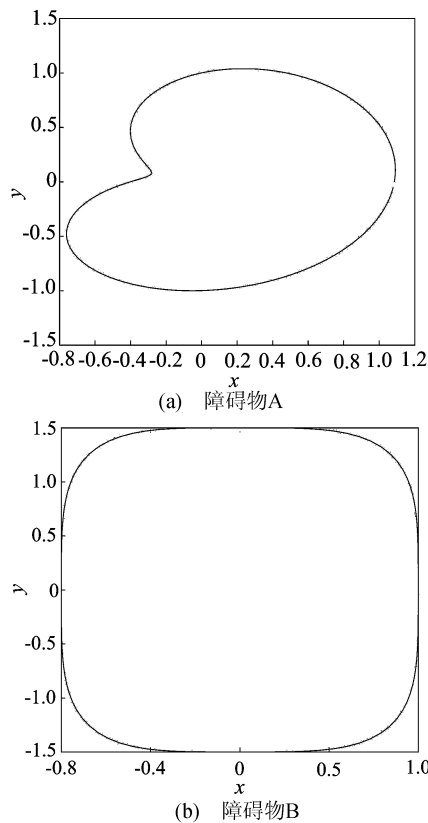


图 1 障碍物 A 和障碍物 B 的真实形状

本文选取 128 个等距采样点来还原真实的边界, 即

$$\theta_i = \frac{2\pi}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad N = 128.$$

在反演过程中取 $N = 64$, 对边界进行离散, 加了噪声的数据形式如下:

$$u_\delta = u + r(\delta_1 + i\delta_2) = \max |u|,$$

其中: $\delta_1, \delta_2 \sim N(0, 1)$; r 为噪声比例, $r = 3\%$ 。

本文将正则化集合卡尔曼滤波和集合卡尔曼滤波还原的边界与真实边界进行对比。在本文所有的例子中, 取波数 $k = 3$, 集合中元素的个数 $J = 350$, 在式(11)中取 $s = 0.6$, 正则化项 $\mathcal{G}[\mathbf{x}] = \mathbf{x}$, 则 $\mathcal{G}[\mathbf{x}] = \mathbf{I}, \mathbf{Q}^{-1} = a\mathbf{I}, a = 0.4, \mathbf{I}$ 为单位矩阵, 对于 Metropolis-Hastings 算法, 取迭代次数 $m = 3000, \beta = 0.01$ 。

例 1 用不同的入射波对数值算法进行测

试,入射方向被选择为:

$$d_1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta = \{0, \pi/4\}\},$$

$$d_2 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta = \{0, \pi/2\}\},$$

$$d_3 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta = \{0, \pi\}\}.$$

Metropolis-Hastings、集合卡尔曼滤波和正则化集合卡尔曼滤波 3 种算法的数值结果如图 2 所示,3 种算法的数值结果迭代过程中的相对误差如图 3 所示。

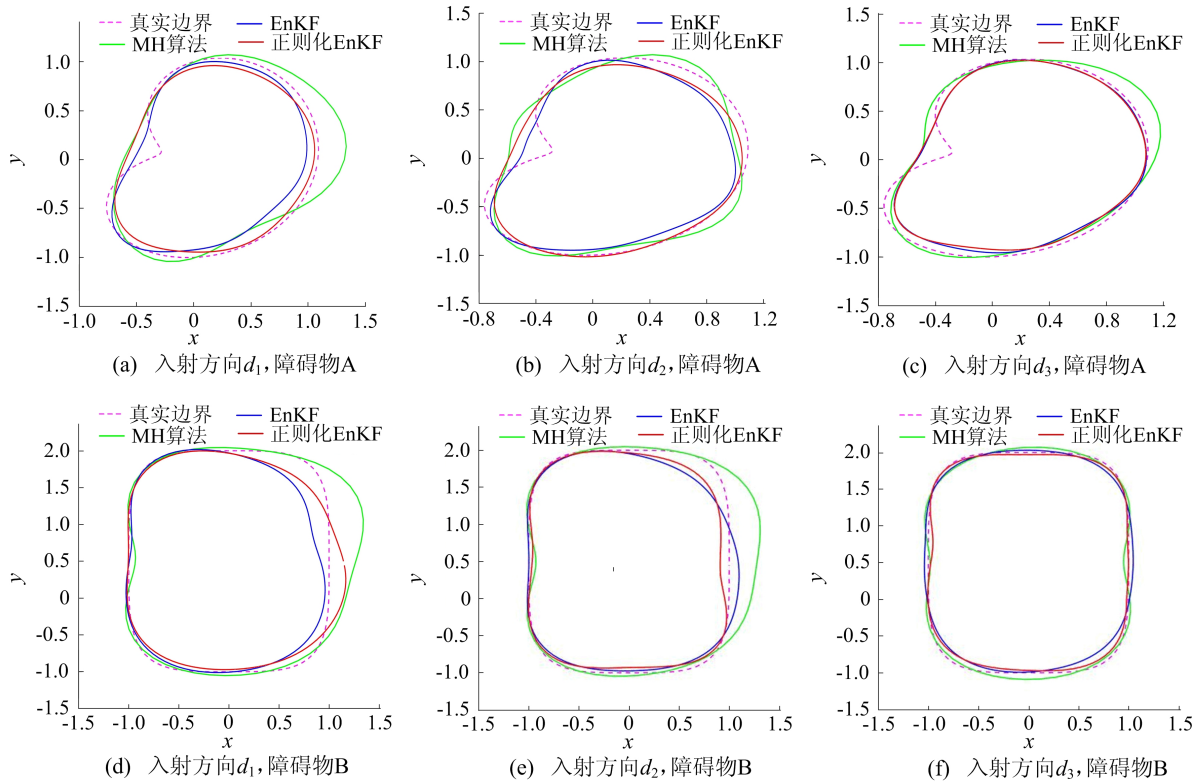


图 2 3 种算法在不同入射方向下的障碍物重建

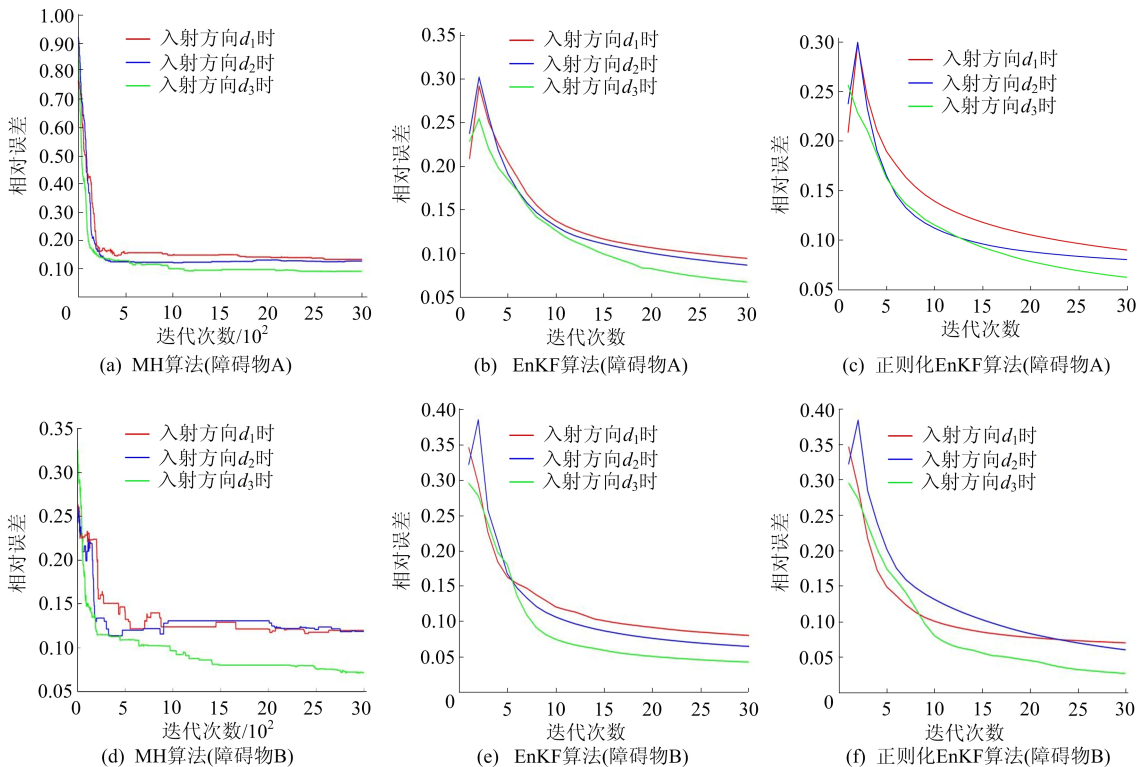


图 3 不同入射方向下 3 种算法迭代过程的相对误差

图 2、图 3 中:MH 算法代表 Metropolis-Hastings 算法;EnKF 算法代表集合卡尔曼滤波算法;正则化 EnKF 算法代表正则化集合卡尔曼滤波;下文同。入射方向为 d_1 、 d_2 、 d_3 时:对障碍物 A 的还原效果如图 2a、图 2b、图 2c 所示,相对误差如图 3a、图 3b、图 3c 所示;对障碍物 B 的还原效果如图 2d、图 2e、图 2f 所示;相对误差如图 3d、图 3e、图 3f 所示。

本文取 $(\|r_{inv}(\theta) - r_{true}(\theta)\|^2 / \|r_{true}(\theta)\|^2)$ 作为相对误差。

从图 2 可以看出:对于不同的入射方向 d_1 、

d_2 、 d_3 ,正则化 EnKF 算法的还原效果都要好于 EnKF 算法和 MH 算法,证明了正则化 EnKF 算法优于 EnKF 算法和 MH 算法的普遍性;且对于入射孔径相同的入射方向 d_1 、 d_2 、 d_3 ,正则化 EnKF 算法、EnKF 算法和 MH 算法的还原效果依次为 d_3 、 d_2 、 d_1 ,说明入射方向对图形还原的影响,入射方向覆盖的范围越大,还原的效果越好。

从图 3 可以看出,正则化 EnKF 算法的相对误差低于 EnKF 算法和 MH 算法的相对误差。

不同入射方向下 MH、EnKF 和正则化 EnKF 3 种算法最终迭代后的相对误差见表 1 所列。

表 1 3 种算法不同入射方向下的相对误差

入射方向	$\partial\Omega_{beam}$			$\partial\Omega_{roundrect}$		
	MH 算法	EnKF 算法	正则化 EnKF 算法	MH 算法	EnKF 算法	正则化 EnKF 算法
d_1	0.133 5	0.094 4	0.089 9	0.119 8	0.080 1	0.070 5
d_2	0.127 5	0.086 7	0.080 3	0.118 5	0.064 8	0.060 6
d_3	0.091 5	0.067 3	0.062 4	0.071 3	0.042 6	0.027 2

从表 1 可知,在 30 次迭代后正则化 EnKF 算法比 EnKF 算法和 MH 算法具有更高的精度。

例 2 选取不同的观测方向来还原边界,取 φ 为观测角度,观测方向如下:

$$s_1 = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi = [0, \pi/4]\},$$

$$s_2 = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi = [0, \pi/2]\},$$

$$s_3 = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi = [0, \pi]\}.$$

选取入射方向为:

$$d_3 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta = \{0, \pi\}\}.$$

MH、EnKF 和正则化 EnKF 3 种算法的数值结果如图 4 所示,3 种算法迭代过程中的相对误差如图 5 所示。

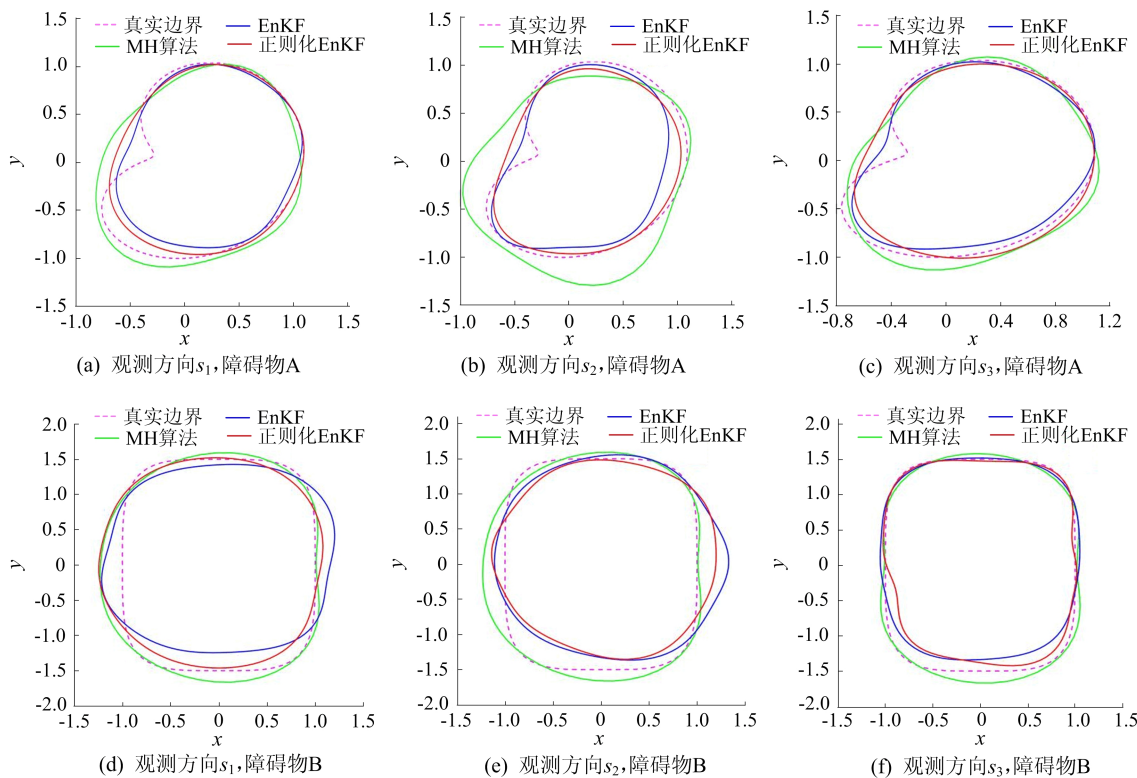


图 4 3 种算法在不同观测方向下的障碍物重建

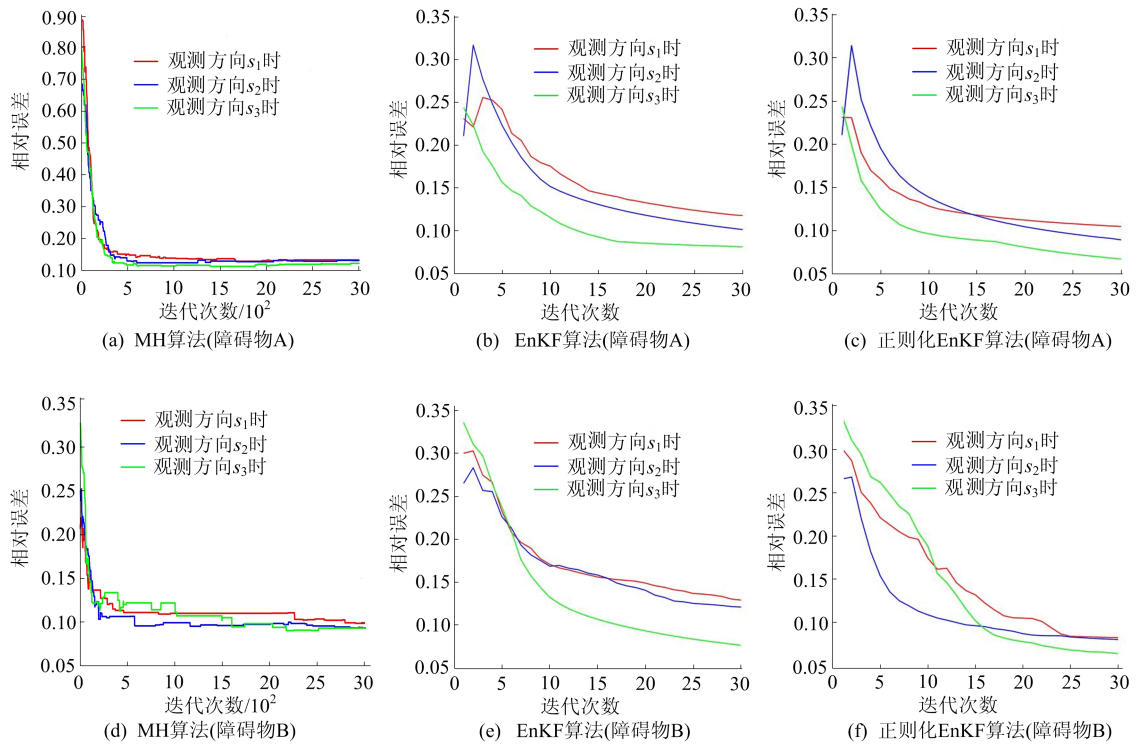


图 5 不同观测方向下 3 种算法迭代过程的相对误差

观测方向为 s_1, s_2, s_3 时:对障碍物 A 的还原效果如图 4a、图 4b、图 4c 所示,相对误差如图 5a、图 5b、图 5c 所示;对障碍物 B 的还原效果如图 4d、图 4e、图 4f 所示,相对误差如图 5d、图 5e、图 5f 所示。

由图 4、图 5 可知,算法既使用非常有限的观测数据也能得到令人满意的边界重建,证明了 MH 算法、EnKF 算法和正则化 EnKF 算法在声波散射问题还原上的可行性。

从图 4 可以看出,对于不同的观测方向 $s_1、$

$s_2、s_3$,正则化 EnKF 算法的还原效果要好于 EnKF 算法和 MH 算法。

从图 5 可以看出,对于不同的观测方向 $s_1、s_2、s_3$,正则化 EnKF 算法的相对误差低于 EnKF 算法和 MH 算法的相对误差。

不同观测方向下 3 种算法最终迭代后的相对误差见表 2 所列。

从表 2 可以看出,在 30 次迭代后,正则化 EnKF 算法相较于 EnKF 算法和 MH 算法具有更高的精度。

表 2 不同观测方向下的相对误差

观测方向	$\partial\Omega_{\text{bean}}$			$\partial\Omega_{\text{roundrect}}$		
	MH 算法	EnKF 算法	正则化 EnKF 算法	MH 算法	EnKF 算法	正则化 EnKF 算法
s_1	0.132 7	0.117 8	0.104 9	0.098 6	0.129 5	0.082 5
s_2	0.130 7	0.101 4	0.089 4	0.093 8	0.121 4	0.080 4
s_3	0.121 8	0.081 3	0.067 2	0.089 2	0.076 9	0.064 0

5 结 论

声波反散射问题具有非线性和不适定性,远场模式的微小数据误差都可能引起散射物边界形状发生很大变化,集合卡尔曼滤波在处理声波反散射问题的时候常会出现精度不够且不稳定的情况。本文在集合卡尔曼滤波中加入正则化思想,

正则化思想常用于解决不适定问题。数值实验结果表明,正则化集合卡尔曼滤波算法相较于集合卡尔曼滤波算法和 Metropolis-Hastings 算法有更高的精度和稳定性,而且相对误差下降速度更快。

今后的工作将继续利用正则化集合卡尔曼滤波处理弹性波或其他波形的反散射问题。

[参 考 文 献]

- [1] BOJARSKI N. Electromagnetic inverse scattering[C]//Antennas and Propagation Society International Symposium. [S. l.]:IEEE,1971;356-358.
- [2] GENNARELLI G, SOLDOVIERI F. A linear inverse scattering algorithm for radar imaging in multipath environments[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2013,10(5):1085-1089.
- [3] LANGENBERG K J, MAYER K, MARKLRIN R. Nondestructive testing of concrete with electromagnetic and elastic waves: modeling and imaging [J]. Cement and Concrete Composites, 2006,28(4):370-383.
- [4] ROSE J H. Elastic wave inverse scattering in nondestructive evaluation[J]. Pure and Applied Geophysics, 1989, 131: 715-739.
- [5] SCHIFFNE M F, SCHMITZ G. Fast pulse-echo ultrasound imaging employing compressive sensing[C]//IEEE International Ultrasonics Symposium. [S. l.]: IEEE, 2011: 688-691.
- [6] SCHIFFNE M F, SCHMITZ G. Pulse-echo ultrasound imaging combining compressed sensing and the fast multipole method[C]//IEEE International Ultrasonics Symposium. [S. l.]:IEEE,2014;2205-2208.
- [7] SHIN C, JANG S, MIN D J. Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory[J]. Geophysical Prospecting, 2001,49(5):592-606.
- [8] WEGLEIN A B, GASPAROTTO F A, CARVALHO P M, et al. An inverse-scattering series method for attenuating multiples in seismic reflection data[J]. Geophysics, 1997, 62(6):1975-1989.
- [9] EVENSEN G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics [J]. Journal of Geophysical Research, 1994,99(C5):10143-10162.
- [10] SIMON D. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(8): 1303-1318.
- [11] AMOR N, RASOOL G, BOUAYNAYA N C. Constrained state estimation: a review[EB/OL]. (2018-07-11)[2022-03-11]. <https://arxiv.org/abs/1807.03463v2>.
- [12] SIMON D, CHIA T L. Kalman filtering with state equality constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(1):128-136.
- [13] JULIER S J, LAVIOLA J J. On Kalman filtering with nonlinear equality constraints[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(6):2774-2784.
- [14] YANG C, BLASCH E. Kalman filtering with nonlinear state constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(1):70-84.
- [15] WANG D B, CHEN Y G, CAI X M. State and parameter estimation of hydrologic models using the constrained ensemble Kalman filter [J]. Water Resources Research, 2009, 45(11): W11416.
- [16] GUPTA N. Kalman filtering in the presence of state space equality constraints [C]//2007 Chinese Control Conference. [S. l.]:IEEE,2007;107-113.
- [17] COLTON D L, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory[M]. [S. l.]:Springer, 1998.
- [18] LI Z X, HUANG J F. EnKF-levelset method for an acoustics inverse medium scattering problem [J]. Journal of Physics(Conference Series), 2020, 1634:012153.
- [19] LI Z X, DENG Z L, SUN J G. Extended-sampling-bayesian method for limited aperture inverse scattering problems [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2020, 13(1): 422-444.
- [20] EDELING W N, SCHMELZER M, DWIGHT R P. Bayesian predictions of Reynolds-averaged Navier-Stokes uncertainties using maximum a posteriori estimates[J]. AIAA Journal, 2018, 56(5):2018-2029.
- [21] Rasmussen C E. Gaussian processes in machine learning [C]//Advanced Lectures on Machine Learning. [S. l.]: Springer, 2003;63-71.
- [22] ZHANG X L, MICHELEN-STROFER C, XIAO H. Regularized ensemble Kalman methods for inverse problems [J]. Journal of Computational Physics, 2020, 416:109517.

(责任编辑 胡亚敏)