

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2024.06.008

# 交通驱动型异质恢复概率的病毒传播

茆鹏飞, 凌翔

(合肥工业大学 汽车与交通工程学院, 安徽 合肥 230009)

**摘要:**当前复杂网络上对交通驱动型病毒传播的研究均假设网络中所有节点具有相同的恢复概率,而节点间异质恢复概率对病毒传播的影响依然不清楚。文章研究异质恢复概率对交通驱动型病毒传播阈值的影响,得出网络结构、交通流量、恢复概率分配策略和路由策略等可以调整病毒传播的阈值。研究表明:当节点传输能力无限、网络中交通处于自由流时,合适的恢复概率分配策略可以提高传播阈值,并且恢复概率分配策略与路由策略耦合可以进一步提高传播阈值,有效抑制网络中病毒的传播;当节点传输能力有限、网络中存在交通拥挤时,病毒传播阈值增大,说明交通拥挤的存在会抑制病毒的爆发。

**关键词:**复杂网络;交通驱动;病毒传播;异质恢复概率;传播阈值

**中图分类号:**U491.13;TP393.08 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2024)06-0773-05

## Traffic-driven epidemic spreading dynamics with heterogeneous recovery rates

MAO Pengfei, LING Xiang

(School of Automobile and Traffic, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** Current researches on traffic-driven epidemic spreading in complex networks assume that all nodes have the same recovery rates. However, the impact of heterogeneous recovery rates between nodes is unclear. This paper studies the influence of heterogeneous recovery rates on the threshold of epidemic spreading, and concludes that network structure, traffic flow, recovery rate allocation strategy and routing strategy can adjust the threshold. When the node transmission capacity is unlimited and the traffic is in free flow, the appropriate recovery rate allocation strategy can improve the epidemic spreading threshold, and the coupling of recovery rate allocation strategy and routing strategy can further improve the epidemic spreading threshold, which effectively inhibits the spread of epidemic in the network. When the node transmission capacity is limited and there is traffic congestion in the network, the epidemic spreading threshold increases, indicating that the existence of traffic congestion will inhibit epidemic outbreak.

**Key words:** complex networks; traffic-driven; epidemic spreading; heterogeneous recovery rates; spreading threshold

复杂网络上的传播问题与社会发展息息相关,如现实生活中流感爆发、互联网中计算机病毒传播、社交网络上思想或谣言扩散、电力网络相继故障等。传播动力学是复杂网络研究<sup>[1]</sup>的主要内容之一,研究复杂网络上的传播行为和传播规

律<sup>[2]</sup>对人类社会的发展有着重要的理论意义和实际应用价值。

长期以来,学者们在复杂网络上对于交通过程<sup>[3-4]</sup>和病毒传播<sup>[5-6]</sup>这2个课题分别进行了广泛研究。文献<sup>[7]</sup>提出交通驱动型病毒传播易感-感

收稿日期:2021-04-14;修回日期:2021-07-14

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(JZ2020HG TB0021)

作者简介:茆鹏飞(1996—),男,江苏盐城人,合肥工业大学硕士生;

凌翔(1983—),男,安徽宣城人,博士,合肥工业大学副教授,硕士生导师。

染-易感(SIS)模型,该模型中病毒通过节点之间的信息包交互进行传播,使得交通流量问题与病毒传播问题紧密联系起来。交通驱动型病毒传播存在一个阈值<sup>[8]</sup>;当传播概率小于传播阈值时,网络中的病毒会彻底消失;当传播概率大于传播阈值时,网络中的病毒将持续存在。因此,传播阈值是评价网络防御病毒能力的一个重要指标。

为了抑制病毒传播,提高网络的传播阈值,学者们提出许多高效可行的控制策略,如有效路由策略<sup>[9]</sup>、节点免疫策略<sup>[10]</sup>、节点或边移除策略<sup>[11]</sup>、异质传播概率<sup>[12]</sup>等。以往的交通驱动型病毒传播研究均假设感染节点有相同的恢复概率,然而在实际生活中考虑到城市的发展水平、教育条件、医疗水平差距等,感染节点的恢复概率往往是存在差异的<sup>[13]</sup>,异质的恢复概率是如何影响交通驱动型病毒传播问题显得尤为重要。

本研究将病毒恢复资源根据节点度分配到不同的节点上,使得节点有不同的恢复概率,以模拟交通驱动型异质恢复概率的病毒传播 SIS 模型;通过大量模拟和平均场理论分析,得出恢复概率分配策略、网络结构、路由策略都是影响病毒传播阈值的重要因素。结果表明:当节点传输能力无限、交通处于自由流时,通过将流量从度大节点引导至度小节点上,同时适当增加度大节点的恢复概率,可以获得更大的传播阈值;当节点传输能力有限,网络中存在交通拥挤,会抑制病毒的传播。

## 1 网络模型

网络模型主要包括交通过程和病毒传播过程 2 个耦合的动态过程。在本节中,对这 2 种动态过程进行详细介绍。

### 1.1 交通过程

网络采用具有  $N$  个节点、平均度为  $\langle k \rangle$  的 BA 网络。BA 网络的度分布为幂律分布,特点是少部分节点的度很大,大部分节点的度比较小,这与现实生活中许多网络系统的特征相符合。

在交通过程中,每个节点都可以生成数据包,同时也可以传递数据包,节点中信息包的容量为无限大。每个时间步网络中的每个节点以  $\lambda$  的概率产生一个信息包,即单位时间步网络中生成的信息包总数为  $N\lambda$ ,生成的这  $N\lambda$  个信息包随机选择目的地节点,一旦数据包到达目的地节点,将该信息包从网络中移除。节点中的信息包均采用先进先出的排队规则。节点的传输能力都为  $C$ ,每个节点在每一个时间步最多可以向其邻居节点发

送  $C$  个信息包。若节点的传输能力  $C$  为无穷大,则网络中所有信息包都可以无延迟的传输,因此不存在交通拥堵情况;若节点的传输能力  $C$  有限,则在单位时间步节点只能传输有限个信息包,节点中的信息包有排队情况,网络中就会存在交通拥挤。

信息包按全局路由策略传输<sup>[14]</sup>,对于任意的节点  $i$  与节点  $j$  之间的路径  $L(P(i \rightarrow j):\alpha)$  定义为:

$$L(P(i \rightarrow j):\alpha) = \sum_{l=1}^n k(x_l)^\alpha \quad (1)$$

其中: $k(x_l)$ 为节点  $l$  的度; $\alpha$ 为可调路由参数。

对于任意一个给定的路由参数,信息包将按照  $L(P(i \rightarrow j):\alpha)$  之和最小的那条路径传输。当  $\alpha=0$  时,为最短路径路由策略,信息包传输选择的路径为节点数之和最小的那一条;当  $\alpha>0$  时,为有效路由策略,在该路由策略下,信息包将优先传输到度较小的节点。

### 1.2 病毒传播过程

将经典的病毒传播 SIS 模型<sup>[15]</sup>引入到交通过程中。在该模型中,网络中节点可以分为 2 种状态:易受感染(S)状态,即健康状态,但有可能被感染;感染(I)状态,即已被感染,具有传染性。病毒通过信息包在网络中进行传播,当一个 S 状态的节点收到一个 I 状态节点发送出来的信息包时,该 S 状态节点将以  $\beta$  的概率变为 I 状态,以  $1-\beta$  的概率保持 S 状态。在下一个时间步, I 状态节点以  $\mu_i$  的概率恢复到 S 状态。假设节点的恢复概率与节点的度相关,则节点的恢复概率分配策略为:

$$\mu_i = \frac{k(x_i)^\theta}{\sum_{l=0}^N k(x_l)^\theta} \eta \quad (2)$$

其中: $\mu_i$ 为节点  $i$  的恢复概率; $\eta$ 为网络中总的恢复资源; $\theta$ 为恢复概率分配的参数。当  $\theta=0$  时,所有节点具有相同的恢复概率;当  $\theta>0$  时,度较大的节点有更大的恢复概率。

初始时所有节点都处于易感状态。网络中的流量达到稳定以后,将比例为  $\rho_0$  的节点设为感染状态,网络中开始传播病毒,模拟的总时间步为 10 000 步。

## 2 理论分析

由于采用的 BA 网络符合幂律分布的特点,可以通过文献[5]不相关网络平均场理论研究,则

交通驱动型异质恢复概率的病毒传播 SIS 模型的动力学速率方程为:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\mu_k \rho_k(t) + \beta \lambda b_{\text{alg}}^k N [1 - \rho_k(t)] Q(t) \quad (3)$$

$$Q(t) = \frac{\sum_{k=5}^N b_{\text{alg}}^k P(k) \rho_k}{\sum_{k=5}^N b_{\text{alg}}^k P(k)} \quad (4)$$

其中: $\rho_k(t)$ 为在  $t$  时刻、度为  $k$  的节点中被感染节点的比例; $\mu_k$  为度为  $k$  的节点恢复概率; $b_{\text{alg}}^k$  为度为  $k$  的节点的算法介数; $Q(t)$  为在  $t$  时刻感染节点发送信息包的比例; $P(k)$  为网络中度为  $k$  的节点所占比例。

当网络中病毒传播到达一个稳定值时有:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = 0 \quad (5)$$

则式(3)和式(4)分别变换为:

$$\rho_k = \frac{\beta \lambda b_{\text{alg}}^k N Q(t)}{\mu_k + \beta \lambda b_{\text{alg}}^k N Q(t)} \quad (6)$$

$$Q(t) = \frac{1}{\sum_{k=5}^N b_{\text{alg}}^k P(k)} \sum_{k=5}^N \frac{(b_{\text{alg}}^k)^2 P(k) \beta \lambda N Q(t)}{\mu_k + \beta \lambda b_{\text{alg}}^k N Q(t)} \quad (7)$$

$Q(t)=0$  一定是方程的唯一解,即对方程(7)

两边关于  $Q$  求导:

$$\frac{1}{\sum_{k=5}^N b_{\text{alg}}^k P(k)} \frac{d}{dQ} \left( \sum_{k=5}^N \frac{(b_{\text{alg}}^k)^2 P(k) \beta \lambda N Q(t)}{\mu_k + \beta \lambda b_{\text{alg}}^k N Q(t)} \right) > 1 \quad (8)$$

解得 BA 网络中病毒传播的阈值  $\beta_c$  为:

$$\beta_c = \frac{\langle b_{\text{alg}} \rangle}{\langle b_{\text{alg}}^2 / \mu \rangle} \frac{1}{\lambda N} \quad (9)$$

其中, $\langle b_{\text{alg}} \rangle$  为网络中所有节点算法介数的平均值。

### 3 模拟结果与分析

模型采用的各参数如下:网络总的恢复资源  $\eta=200$ ;初始感染比例  $\rho_0=0.1$ 。

#### 3.1 节点传输能力无限的情况

在节点传输能力无限的情况下,网络中交通处于自由流,不会出现交通拥堵。

1) 网络平均度对病毒传播阈值的影响。平均度不同的网络中,恢复概率分配参数  $\theta$  对传播阈值  $\beta_c$  的影响如图 1 所示。图 1 中:节点数  $N=1000$ ;路由参数  $\alpha=0$ ;信息包产生率  $\lambda=0.3$ 。

从图 1 可以看出,在不同平均度的网络中,随

着  $\theta$  的增大, $\beta_c$  会先增大后减小, $\theta$  存在一个最优值使得传播阈值  $\beta_c$  最大。这种现象可以理解为:在最短路由策略( $\alpha=0$ )下,网络中度大的节点具有较好的连通性,信息包会优先通过这些节点来减少传输距离,通过适当的恢复概率分配策略,使度较大的节点可以获得更多的恢复概率,一旦度大的节点被感染后能够很快地恢复为易感状态,从而抑制了病毒在网络中的传播,使得传播阈值增大;当  $\theta$  继续增大时,会使得度较小的节点恢复概率很小,这些节点一旦被感染后很难恢复到易感状态,会一直在网络中传播病毒,导致传播阈值减小。从图 1 还可以看出,模拟结果与式(9)的理论分析在定性上是一致的。

不同恢复概率分配策略下,网络平均度  $\langle k \rangle$  对传播阈值  $\beta_c$  的影响如图 2 所示。图 2 中:节点数  $N=1000$ ,路由参数  $\alpha=0$ ,信息包产生率  $\lambda=0.3$ 。

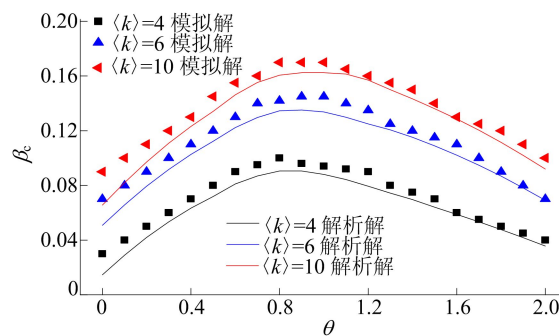


图 1 不同平均度网络中  $\theta$  与  $\beta_c$  的关系

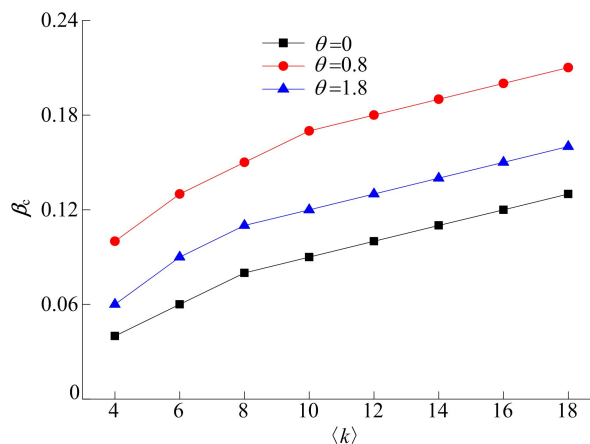


图 2 不同恢复概率分配策略下  $\langle k \rangle$  与  $\beta_c$  的关系

从图 2 可以看出,对于任意一个可调参数  $\theta$ ,  $\beta_c$  随着平均度的增大而增大。这种现象可以理解为:当网络中节点数固定时,改变网络结构、增加网络的平均度相当于增加网络中节点的连通程度,减少信息包在网络中传输的路径长度,通过每

个节点的信息包数量减小,使得易感节点被感染的概率变小,从而增大了传播阈值。

2) 网络中交通流量对传播阈值的影响。在不同恢复概率分配策略下,网络节点数  $N$  对传播阈值  $\beta_c$  的影响如图 3 所示。图 3 中:网络平均度  $\langle k \rangle = 10$ , 路由参数  $\alpha = 0$ , 信息包产生率  $\lambda = 0.3$ 。

不同的恢复概率分配策略下,信息包产生率  $\lambda$  对传播阈值  $\beta_c$  的影响如图 4 所示。图 4 中:节点数  $N = 1\ 000$ , 平均度  $\langle k \rangle = 10$ , 路由参数  $\alpha = 0$ 。

从图 3、图 4 可以看出,对于任意一个可调参数,  $\beta_c$  随着节点数、信息包产生率的增大而减小。这种现象可以理解为:增大网络中信息包的数量,单位时间感染节点可以发送更多的信息包,易感状态节点被感染的概率变大,使得传播阈值减小。

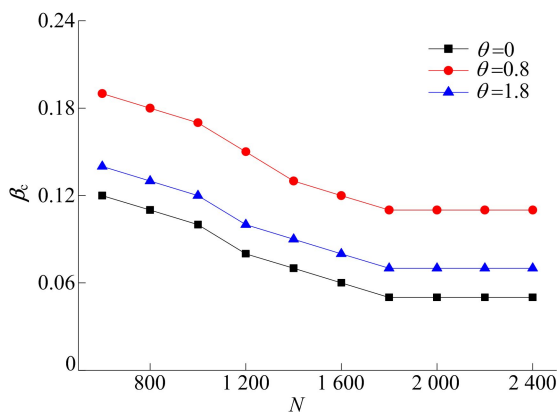


图 3 不同恢复概率分配策略下  $N$  与  $\beta_c$  的关系

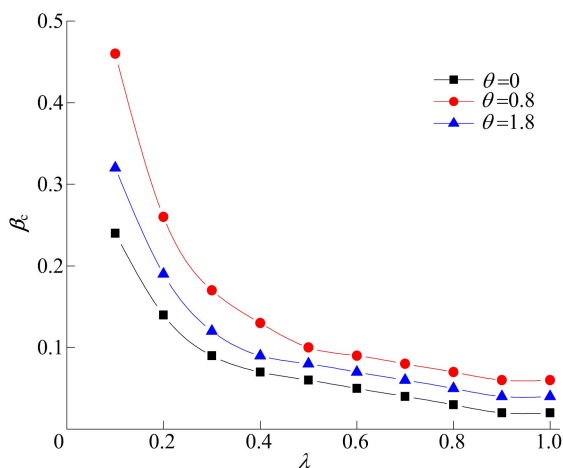


图 4 不同恢复概率分配策略下  $\lambda$  与  $\beta_c$  的关系

3) 路由策略和恢复概率分配策略耦合对传播阈值的影响。以往的研究<sup>[9]</sup>发现,有效路由策略可以增大病毒传播的阈值。在不同路由策略下,恢复概率分配参数  $\theta$  对传播阈值  $\beta_c$  的影响如图 5 所示。图 5 中:节点数  $N = 1\ 000$ , 平均度

$\langle k \rangle = 10$ , 信息包产生率  $\lambda = 0.3$ 。

由图 5 可得:当  $\alpha = 0, \theta = 0$  时,  $\beta_c = 0.09$ ; 当  $\alpha = 0, \theta = 0.8$  时,  $\beta_c = 0.17$ ; 当  $\alpha = 0.3, \theta = 0.8$  时,  $\beta_c = 0.23$ 。从上述数据可以看出,传播阈值明显增大。同时从图 5 还可以看出,模拟结果与式(9)的理论分析相符合。研究发现:合理的恢复资源分配参数和有效路由策略能进一步提高网络的传播阈值,这是由于合适的路由参数使得网络中一部分信息包走向度较小的节点,减小了度大节点的交通流量,再通过合理分配节点的恢复概率,使得传播阈值更大;然而当  $\alpha = 1.0$  时,网络中流量分布均匀,根据度的大小分配节点的恢复概率,反而使得传播阈值越来越小,这说明路由策略与恢复资源策略之间的适当耦合可以有效地抑制病毒在网络中的传播。

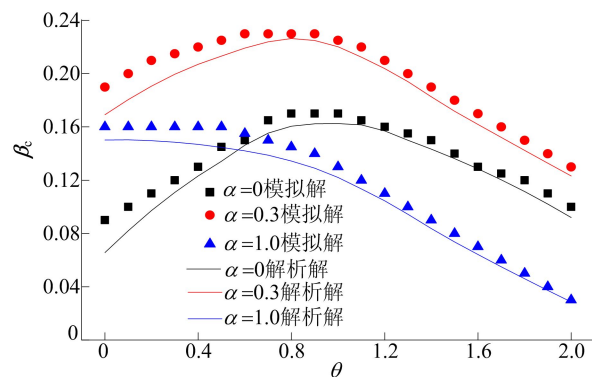


图 5 不同路由策略下  $\theta$  与  $\beta_c$  的关系

### 3.2 节点传输能力有限的情况

节点传输能力有限的情况下,随着信息包产生率的增大,网络中会存在拥挤。当传输能力有限( $C = 10$ )和传输能力  $C$  无限时,研究交通拥挤对病毒传播的影响。

节点传输能力有限和无限时,信息包产生率  $\lambda$  对传播阈值  $\beta_c$  的影响如图 6 所示。其中:节点数  $N = 1\ 000$ , 平均度  $\langle k \rangle = 10$ 。

从图 6a 可以看出,节点传输能力有限的传播阈值明显大于传输能力为无限大的传播阈值。从图 6b 可以看出:信息包的产生率小于信息包产生率临界值时,网络中没有交通拥挤,节点传输能力有限和传输能力无限的传播阈值相同;当信息包的产生率大于信息包产生率临界值时,节点传输能力有限的传播阈值大于传输能力无限大的网络。图 6a 和图 6b 都表明交通拥堵会抑制病毒的传播。上述现象可以解释如下:若网络中的节点变得拥挤,则每个时间步不能传递队列上的所有

信息包。减少传递数据包的数量,可以帮助节点减少被感染的概率,增大网络的传播阈值。

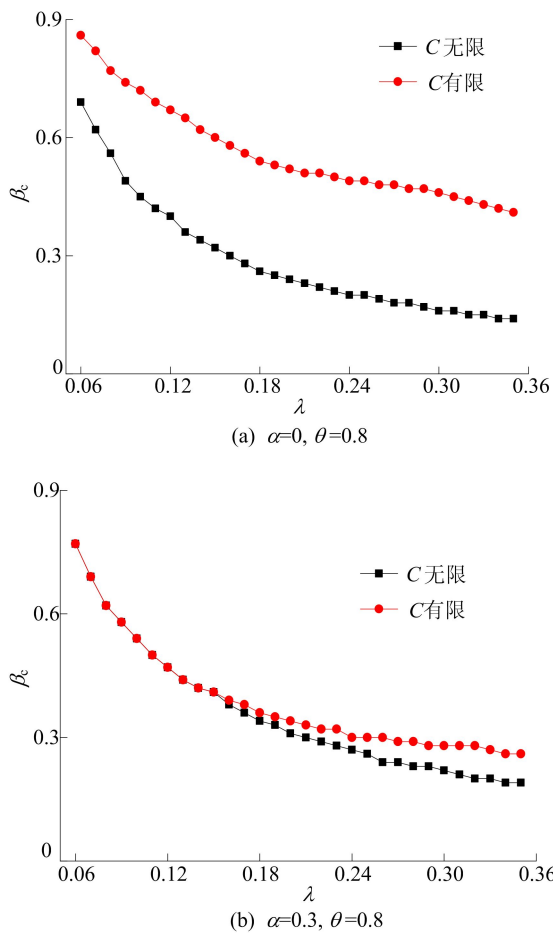


图6 传输能力有限和无限时 $\lambda$ 与 $\beta_c$ 的关系

#### 4 结 论

本文研究了交通驱动型异质恢复概率的病毒传播 SIS 模型,节点不同的恢复概率可以反映不同节点对抗病毒的能力,有效利用有限资源是控制病毒爆发的关键,合理的恢复概率分配显得尤为重要。研究发现:交通自由流时,恢复概率分配策略可以有效地提高网络的传播阈值;适当的耦合恢复概率分配策略与路由策略可以进一步提高网络的阈值,并通过不相关网络平均场理论提供了模拟结果一致的预测结果。在交通拥挤时,交通拥堵会抑制病毒的传播。

本文研究结果表明,可以通过调整路由策略和恢复资源分配策略来控制病毒的传播。该研究结果对抑制计算机病毒在互联网上的传播有一定

的意义。

#### [参 考 文 献]

- [1] 龚凯. 基于复杂网络理论的社区动力学研究及应用[D]. 成都:电子科技大学,2014.
- [2] 李树彬,吴建军,高自友,等. 基于复杂网络的交通拥堵与传播动力学分析[J]. 物理学报,2011,60(5):146-154.
- [3] 凌翔. 复杂网络上交通过程的动态特性研究[D]. 合肥:中国科学技术大学,2011.
- [4] 刘刚,李永树. 基于引力约束的复杂网络拥塞问题研究[J]. 物理学报,2012(10):108901-108901.
- [5] 鲁延玲. 基于人类行为的复杂网络病毒传播研究[D]. 南京:南京邮电大学,2015.
- [6] 巩永旺. 考虑个体行为的复杂网络病毒传播研究[D]. 南京:南京邮电大学,2014.
- [7] MELONI S, ARENAS A, MORENO Y. Traffic-driven epidemic spreading in finite-size scale-free networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2009, 106(40):16897-16902.
- [8] WU Y Q, PU C L, LI L B, et al. Traffic-driven epidemic spreading and its control strategies[J]. Digital Communications and Networks, 2019, 5(1):56-61.
- [9] YANG H X, WU Z X. Suppressing traffic-driven epidemic spreading by use of the efficient routing protocol[J]. Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment, 2015, 2014(3):P03018.
- [10] YANG H X, WANG B H. Immunization of traffic-driven epidemic spreading[J]. Physica A (Statistical Mechanics and its Applications), 2016, 443:86-89.
- [11] YANG H, WU Z, WANG B. Suppressing traffic-driven epidemic spreading by edge-removal strategies[J]. Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics), 2013, 87(6):064801.
- [12] CHEN J, HU M B, LI M. Traffic-driven epidemic spreading dynamics with heterogeneous infection rates[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2020, 132:109577.
- [13] SHEN C, CHEN H, HOU Z. Strategy to suppress epidemic explosion in heterogeneous meta population networks [J]. Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics), 2012, 86(2/3):036114.
- [14] YAN G, ZHOU T, HU B, et al. Efficient routing on complex networks[J]. Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics), 2005, 73(2):046108.
- [15] CASTELLANO C, PASTOR-SATORRAS R. Thresholds for epidemic spreading in networks[J]. Physical Review Letters, 2010, 105(21):218701.

(责任编辑 胡亚敏)