

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2024.06.016

双参数四重细分法

刘植¹, 李睿¹, 王旭辉²

(1. 合肥工业大学 数学学院, 安徽 合肥 230601; 2. 河海大学 数学学院, 江苏 南京 210098)

摘要:文章借助反向构造和倍乘平滑因子操作提出一种双参数四重细分法,运用生成多项式推导证明该四重细分方法的连续性,求解出满足 $C^0 \sim C^3$ 连续性的具体参数取值区间。该文通过数值实例分析各参数对形成曲线的影响,用动态的参数迭代过程描述曲线生成的变化细节。

关键词:反向构造;生成多项式;四重细分; C^k 连续性;参数选取

中图分类号:TP391.72 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2024)06-0823-06

Quaternary subdivision scheme with two parameters

LIU Zhi¹, LI Rui¹, WANG Xuhui²

(1. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230601, China; 2. School of Mathematics, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A quaternary subdivision scheme with two parameters is proposed by using reverse construction and multiplying smoothing factor. The continuity of this quaternary subdivision scheme is analyzed by generator polynomial. The specific parameter value intervals satisfying $C^0 \sim C^3$ continuity are provided. Numerical examples demonstrate the influence of each parameter on the curve formation, and the dynamic parameter iteration process describes the change details of the curve generation.

Key words: reverse construction; generator polynomial; quaternary subdivision; C^k -continuity; parameter selection

0 引言

在计算机辅助几何设计领域往往需要借助造型方法描述复杂的几何形状,细分方法作为一种较新的造型方法,因其具有算法简单高效、适用性强等优点渐渐受到众多学者的关注,并在几何造型领域得到广泛应用。它是一种综合函数与分形的离散造型方法,自文献[1]中二点二重逼近型细分方法被提出以来,细分方法已经成为计算机辅助几何设计领域的一项重要研究内容,该方法根据不同的分类标准可以被划分为不同的类型,含参细分法是其中的一个重要分支;文献[2]通过引进张力参数和偏移参数,提出一种四点二重混合型细分方法;文献[3]提出带有形状参数 ω 的四点四重细分方法,对其连续性和逼近阶进行了分

析;文献[4]将四点插值细分法进行推广,提出一类包含 2 个形状参数的双参数四点二重细分法和多参数三重细分格式;文献[5]从三次 B 样条基函数的角度出发,提出含参数 d 的四点四重逼近型细分方法,讨论了其 C^k 连续性;文献[6]提出一种含参数的非静态二重混合细分法;文献[7]提出具有 3 个参数的四点三重细分格式,并对生成极限曲线的性质进行了分析;文献[8]提出五点二重融合型细分法,通过对融合型细分法中的参数进行不同取值,可以分别生成具备不同连续性的极限曲线;文献[9]利用连分式技术构造了带张力参数的非静态四点三重插值细分方法,极限曲线至少为 C^2 连续。

基于以上研究,本文提出一种双参数四重细分法,运用生成多项式理论证明了该四重细分方

收稿日期:2023-05-08;修回日期:2023-06-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62172135)

作者简介:刘植(1976—),男,安徽金寨人,博士,合肥工业大学副教授,硕士生导师;
王旭辉(1980—),男,安徽合肥人,博士,河海大学教授,博士生导师。

法的连续性,给出满足 $C^0 \sim C^3$ 连续性的具体参数取值区间,并用数值实例分析各参数对形成曲线的影响。

1 预备知识

给定初始控制点集 $P^0 = \{P_i^0 \in \mathbf{R}^d\}_{i \in \mathbf{Z}}$, 设 $P^k = \{P_i^k \in \mathbf{R}^d\}_{i \in \mathbf{Z}}$ 是第 k 次细分后形成的控制点集,则四重细分法 S 的细分规则可以表示为:

$$P_i^{k+1} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_{i-4j}^k P_j^k, \quad i \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

其中: $a = \{a_i | i \in \mathbf{Z}\}$ 为该细分方法的掩模; $a(z) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i z^i$ 为该细分方法的 Laurent 生成多项式。

引理 1^[10] 若四重细分方法 S 一致收敛,则其对应的掩模 $a = \{a_i | i \in \mathbf{Z}\}$ 满足:

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+1} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+2} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+3} = 1 \quad (2)$$

引理 2^[11] 若四重细分方法 S 的掩模满足引理 1,必存在细分方法 S_1 (称为方法 S 的一阶差分格式) 满足 $dP^k = S_1 dP^{k-1}$, 其中: $P^k = S^k P^0$; $dP^k = \{(dP^k)_i = 4^k (p_{i+1}^k - p_i^k) | i \in \mathbf{Z}\}$ 。将 S_n 记作方法 S 的 n 阶差分格式,差分格式 S_n 的 Laurent 生成多项式为 $a^{(n)}(z)$ 。此时, $a^{(n)}(z)$ 和 $a(z)$ 满足:

$$a^{(n)}(z) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i^{(n)} z^i = \left(\frac{4z^3}{1+z+z^2+z^3} \right)^n a(z) \quad (3)$$

引理 3^[12] 若四重细分方法 S 的掩模 $a = \{a_i | i \in \mathbf{Z}\}$ 与其 j 阶差分格式 S_j ($j=1, 2, \dots, n+1$) 对应的掩模 $a^{(j)} = \{a_i^{(j)} | i \in \mathbf{Z}\}$ 满足:

$$\begin{cases} \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+1} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+2} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+3} = 1, \\ \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i}^{(j)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+1}^{(j)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+2}^{(j)} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_{4i+3}^{(j)} = 1 \end{cases} \quad (4)$$

且存在正整数 L , 使得 $\left\| \left(\frac{1}{4} S_{n+1} \right)^L \right\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} |b_{i-4j}^{[L]}| \mid 0 \leq i < 4^L \right\} < 1$, 则四重细分法 S 可生成 C^n 连续曲线, 其中: $b^{[L]}(z) = b(z)b(z^4) \cdots b(z^{4^{L-1}})$; $b(z) = \frac{1}{4} a^{(n+1)}(z)$ 。

特别地, 当 $L=1$ 时, 则有:

$$\left\| \frac{1}{4} S_{n+1} \right\|_{\infty} = \frac{1}{4} \max \left\{ \sum_{i \in \mathbf{Z}} |a_{4i+m}^{(n+1)}| \mid m = 0, 1, 2, 3 \right\} < 1 \quad (5)$$

2 双参数四重细分法的构造

2.1 反向构造

要构造一个四重细分法,通常用字母参数表示欲求解出的权重系数,列出细分方法迭代式(一般具有对称性),再次推导出相对应的 Laurent 生成多项式,反向构造则从想要得到的 Laurent 多项式出发,由结果反推最初的细分格式。首先为四重细分方法定义如下生成多项式:

$$a(z) = \left(\frac{1+z+z^2+z^3}{4} \right)^3 z^{-5} [uz^4 + (v-4u)z^3 + (4+6u-2v)z^2 + (v-4u)z + u] \quad (6)$$

一般地,平滑因子又称光滑因子,形如 $\sigma(z) = (1+z+\dots+z^{m-1})/m$, 其中 $m \geq 2$ 为重数,扰动函数 $\delta(z)$ 则与 z 有关。式(6)即为取平滑因子 $\sigma(z) = (1+z+z^2+z^3)/4$ 、扰动函数 $\delta(z) = uz^4 + (v-4u)z^3 + (4+6u-2v)z^2 + (v-4u)z + u$ 时的情形。

将式(6)中 $a(z)$ 展开,求出关于 z 指数幂的各项系数,由各项系数与细分方法掩模的关系,可以得到四重细分格式如下:

$$\begin{cases} P_{4i}^{k+1} = \frac{1}{64} u P_{i-2}^k + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{64} u + \frac{1}{64} v \right) P_{i-1}^k + \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{32} v + \frac{3}{64} u \right) P_i^k + \left(\frac{1}{64} v - \frac{1}{64} u \right) P_{i+1}^k, \\ P_{4i+1}^{k+1} = \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{64} u \right) P_{i-1}^k + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{32} v \right) P_i^k + \left(\frac{1}{64} v + \frac{1}{16} \right) P_{i+1}^k, \\ P_{4i+2}^{k+1} = \left(\frac{1}{64} v + \frac{1}{16} \right) P_{i-1}^k + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{32} v \right) P_i^k + \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{64} u \right) P_{i+1}^k, \\ P_{4i+3}^{k+1} = \left(\frac{1}{64} v - \frac{1}{64} u \right) P_{i-1}^k + \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{32} v + \frac{3}{64} u \right) \times \\ P_i^k + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{64} u + \frac{1}{64} v \right) P_{i+1}^k + \frac{1}{64} u P_{i+2}^k \end{cases} \quad (7)$$

反向构造的优点是可以依设计者需要自行设置扰动函数 $\delta(z)$, 在此方法中, $\delta(z)$ 还可以有其他各类取法,只需要保持系数对称性即可。由 $\delta(z)$ 系数对称再向回反推时,可以保证各阶差分格式的 Laurent 多项式系数具有对称性,进而原始细分方法的权重系数也是对称出现的。在 $a(z)$ 系数不满足对称性时,所设计出的细分方法在数值实验过程中生成曲线时易产生性质不良的

点,甚至会出现不相容现象。

为避免产生不相容现象,将生成多项式(6)进一步归纳并改进为:

$$a(z) = \left(\frac{1+z+z^2+z^3}{4}\right)^n z^{-\frac{3}{2}n-2} [uz^4 + (v-4u)z^3 + (4+6u-2v)z^2 + (v-4u)z + u] \quad (8)$$

2.2 提升连续性

对四重细分格式(7)的连续性进行分析: $a(z)$ 中最高次幂为 z^8 ,最低次幂为 z^{-5} ; $a^{(1)}(z)$ 中最高次幂为 z^8 ,最低次幂为 z^{-2} ;以此类推, $a^{(4)}(z)$ 中最高次幂为 z^8 ,最低次幂为 z^7 。因此在采用 $\left\|\frac{1}{4}S_n\right\|_{\infty} < 1 (n=1,2,3,4)$ 公式依次对其验证时,只能进行到 $n=3$ 情形,故此时四重细分格式(7)仅具有 C^2 阶连续性。

在文献[13]中,提出在标量细分中乘以平滑因子以提高相对应向量细分方法的平滑性质,借助类似的思想达到提升四重细分格式(7)生成曲线连续性的效果。

对于具有 Laurent 生成多项式形如式(8)的细分方法而言,提升 m 和 n 的取值均能在一定程度上提升得到细分法的 C^k 连续性, n 的取值需要保证在 $a(z)$ 的基础上计算直至 $k+1$ 阶差分格式的洛朗多项式的步骤能够进行到最后,因此在给定 m 重细分后,构造式中 n 的取值与 k 呈正相关。由此可以看出,提升 n 的取值能够增加细分法的平滑性,表现在符号上即为进行倍乘平滑因子操作。提升 n 的取值为4,由公式 $a(z) = [(1+z+z^2+z^3)/(4z^3)]^n a^{(n)}(z)$,即可推出四重细分格式 $S_{u,v}$ 。

定义 1 给定初始控制点集 $P^0 = \{P_i^0 \in \mathbf{R}^d\}_{i \in \mathbf{Z}}$, 设 $P^k = \{P_i^k \in \mathbf{R}^d\}_{i \in \mathbf{Z}}$ 是第 k 次细分后形成的控制点集, 则双参数四重细分法 $S_{u,v}$ 的第 $k+1$ 层细分规则定义为:

$$\begin{cases} P_{4i}^{k+1} = cP_{i-2}^k + gP_{i-1}^k + gP_i^k + cP_{i+1}^k, \\ P_{4i+1}^{k+1} = bP_{i-2}^k + fP_{i-1}^k + hP_i^k + dP_{i+1}^k, \\ P_{4i+2}^{k+1} = aP_{i-2}^k + eP_{i-1}^k + iP_i^k + eP_{i+1}^k + aP_{i+2}^k, \\ P_{4i+3}^{k+1} = dP_{i-1}^k + hP_i^k + fP_{i+1}^k + bP_{i+2}^k. \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{256}u; b = \frac{1}{256}v; c = \frac{1}{64} + \frac{1}{128}v; \\ d &= \frac{1}{16} + \frac{3}{256}v; e = \frac{5}{32} - \frac{4}{256}u + \frac{1}{64}v; \\ f &= \frac{5}{16} + \frac{1}{256}v; g = \frac{31}{64} - \frac{1}{128}v; \end{aligned}$$

$$h = \frac{5}{8} - \frac{5}{256}v; i = \frac{3}{128}u + \frac{11}{16} - \frac{1}{32}v; u, v \in \mathbf{R}.$$

3 连续性分析

对双参数四重细分法 $S_{u,v}$ 进行连续性分析, 易知 u, v 的取值影响 C^k 连续性。由引理 2, 计算细分法 $S_{u,v}$ 对应的 Laurent 多项式可得:

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{1}{256}uz^{-6} + \frac{1}{256}vz^{-5} + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{128}v\right)z^{-4} + \\ &\left(\frac{1}{16} + \frac{3}{256}v\right)z^{-3} + \left(\frac{5}{32} - \frac{4}{256}u + \frac{1}{64}v\right)z^{-2} + \\ &\left(\frac{5}{16} + \frac{1}{256}v\right)z^{-1} + \frac{31}{64} - \frac{1}{128}v + \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{256}v\right)z + \\ &\left(\frac{3}{128}u + \frac{11}{16} - \frac{1}{32}v\right)z^2 + \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{256}v\right)z^3 + \\ &\left(\frac{31}{64} - \frac{1}{128}v\right)z^4 + \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{256}v\right)z^5 + \\ &\left(\frac{5}{32} - \frac{4}{256}u + \frac{1}{64}v\right)z^6 + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{256}v\right)z^7 + \\ &\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{128}v\right)z^8 + \frac{1}{256}vz^9 + \frac{1}{256}uz^{10}. \end{aligned}$$

再由 $a^{(n)}(z) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i^{(n)} z^i = \left(\frac{4z^3}{1+z+z^2+z^3}\right)^n \times a(z)$ 可得:

$$\begin{aligned} a^1(z) &= 4 \left[\frac{1}{256}uz^{-3} + \left(\frac{1}{256}v - \frac{1}{256}u\right)z^{-2} + \right. \\ &\left. \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{256}v\right)z^{-1} + \left(\frac{3}{64} + \frac{1}{256}v\right) + \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{256}u + \frac{1}{256}v\right)z + \right. \\ &\left. \left(\frac{5}{32} + \frac{3}{256}u - \frac{1}{128}v\right)z^2 + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{128}v\right)z^3 + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{128}v\right)z^4 + \right. \\ &\left. \left(\frac{5}{32} + \frac{3}{256}u - \frac{1}{128}v\right)z^5 + \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{256}u + \frac{1}{256}v\right)z^6 + \left(\frac{3}{64} + \frac{1}{256}v\right)z^7 + \right. \\ &\left. \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{256}v\right)z^8 + \left(\frac{1}{256}v - \frac{1}{256}u\right)z^9 + \frac{1}{256}uz^{10} \right], \\ a^2(z) &= 16 \left[\frac{1}{256}u + \left(\frac{1}{256}v - \frac{1}{128}u\right)z + \right. \\ &\left. \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{256}u\right)z^2 + \frac{1}{32}z^3 + \left(\frac{3}{64} - \frac{1}{128}u\right)z^4 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64}u - \frac{1}{128}v\right)z^5 + \right. \\ &\left. \left(\frac{3}{64} - \frac{1}{128}u\right)z^6 + \frac{1}{32}z^7 + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{256}u\right)z^8 + \right. \\ &\left. \left(\frac{1}{256}v - \frac{1}{128}u\right)z^9 + \frac{1}{256}uz^{10} \right], \\ a^3(z) &= 64 \left[\frac{1}{256}uz^3 + \left(\frac{1}{256}v - \frac{3}{256}u\right)z^4 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{256}u - \frac{1}{256}v\right)z^5 + \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{256}u\right)z^6 + \\ & \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{256}u\right)z^7 + \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{256}u - \right. \\ & \left. \frac{1}{256}v\right)z^8 + \left(\frac{1}{256}v - \frac{3}{256}u\right)z^9 + \frac{1}{256}uz^{10} \Big], \\ a^4(z) = & 256 \left[\frac{1}{256}uz^6 + \left(\frac{1}{256}v - \frac{1}{64}u\right)z^7 + \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{128}u - \frac{1}{128}v\right)z^8 + \right. \\ & \left. \left(-\frac{1}{64}u + \frac{1}{256}v\right)z^9 + \frac{1}{256}uz^{10} \right]. \end{aligned}$$

由引理 3 可知,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{4}S_1 \right\|_{\infty} = & \max \left\{ \left| \frac{1}{256}u \right| + \left| \frac{3}{32} - \frac{3}{256}u + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{256}v \right| + \left| \frac{5}{32} + \frac{3}{256}u - \frac{1}{128}v \right| + \left| \frac{1}{256}v - \frac{1}{256}u \right|, \right. \\ & \left. \left| \frac{1}{64} + \frac{1}{256}v \right| + \left| \frac{3}{16} - \frac{1}{128}v \right| + \left| \frac{3}{64} + \frac{1}{256}v \right| \right\}; \\ \left\| \frac{1}{4}S_2 \right\|_{\infty} = & 4 \max \left\{ \left| \frac{1}{256}u \right| + \left| \frac{3}{64} - \frac{1}{128}u \right| + \right. \\ & \left. \left| \frac{1}{64} + \frac{1}{256}u \right|, 2 \left| \frac{1}{256}v - \frac{1}{128}u \right| + \right. \\ & \left. \left| \frac{1}{16} + \frac{1}{64}u - \frac{1}{128}v \right| \right\}; \\ \left\| \frac{1}{4}S_3 \right\|_{\infty} = & 16 \max \left\{ \left| \frac{1}{256}u \right| + \left| \frac{1}{64} - \frac{1}{256}u \right|, \right. \\ & \left. \left| \frac{1}{256}v - \frac{3}{256}u \right| + \left| \frac{1}{64} + \frac{3}{256}u - \frac{1}{256}v \right| \right\}; \\ \left\| \frac{1}{4}S_4 \right\|_{\infty} = & 64 \max \left\{ 2 \left| \frac{1}{256}u \right|, \left| \frac{1}{256}v - \frac{1}{64}u \right|, \right. \\ & \left. \left| \frac{1}{64} + \frac{3}{128}u - \frac{1}{128}v \right| \right\}. \end{aligned}$$

分别令上述 $\left\| \frac{1}{4}S_{n+1} \right\|_{\infty}$ ($n=0, 1, 2, 3$) 依次小于 1, 即可按序解出使得 $C^0 \sim C^3$ 连续性满足的 u, v 取值, 见表 1 所列。

表 1 $C^0 \sim C^3$ 连续性满足时 u, v 的取值

参数区间	连续性
$-62 < u \leq 0, -56 < v < 2u + 68$	C^0
$0 < u \leq 2, -56 < v < \frac{1}{2}(3u + 136)$	
$2 < u \leq \frac{8}{3}, 2u - 60 < v < \frac{1}{2}(3u + 136)$	
$\frac{8}{3} < u \leq 60, 2u - 60 < v < 72$	
$60 < u < 64, 3u - 120 < v < 28$	C^1
$-14 < u < 18, 2u - 12 < v < 2u + 20$	
$-6 < u < 10, 3u - 4 < v < 3u + 20/3$	
$-2 < u \leq 0, 3u < v < 4u + 4$	
$0 < u < 2, 3u < v < 3u + 4$	

由表 1 可知, 双参数四重细分法 $S_{u,v}$ 能够达到 C^3 连续, 利用联合谱半径方法^[14] 同样能够证明细分法 $S_{u,v}$ 达到 C^3 连续, 当且仅当 u, v 的取值落入区间 Λ 中, 其中 $\Lambda = \{-2 < u \leq 0, 3u < v < 4u + 4\} \cup \{0 < u < 2, 3u < v < 3u + 4\}$ 。

4 数值实例

由四重细分格式 $S_{u,v}$ 作用在给定的初始控制点上, 生成的极限曲线如图 1、图 2 所示。图 1 和图 2 中: 虚线表示初始控制多边形; 实线与点线表示极限曲线; 菱形点表示初始控制顶点。

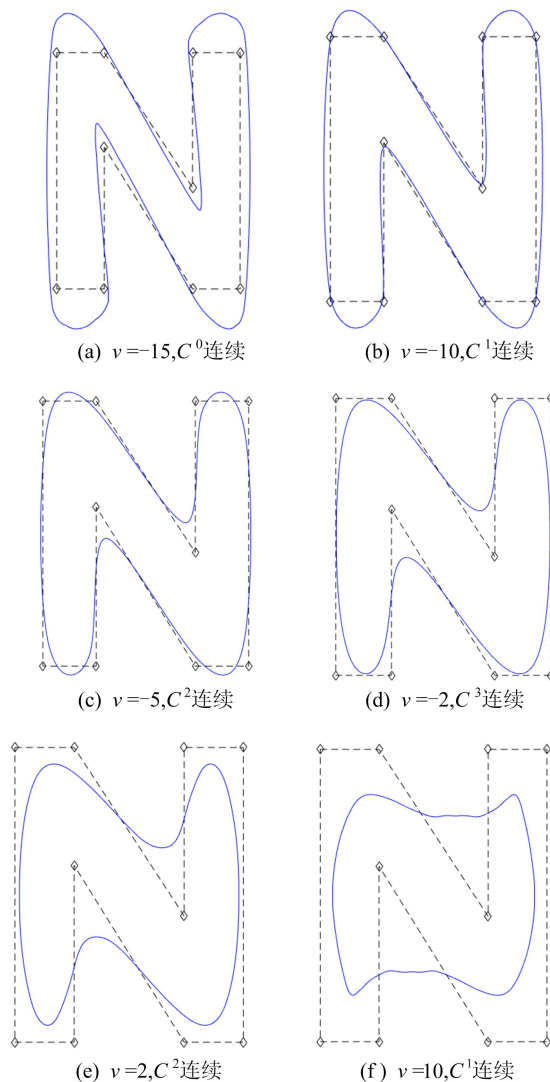


图 1 $u = -1$ 时四重细分格式 $S_{u,v}$ 生成的极限曲线

当 $u = -1$ 时, 改变 v 的取值, 由表 1 可解出不同的 v 值对 C^k 连续性的影响为: 当 $-56 < v < 66$ 时, 生成曲线有 C^0 连续性; 当 $-14 < v < 18$ 时, 生成曲线有 C^1 连续性; 当 $-7 < v < \frac{11}{3}$ 时, 生

成曲线有 C^2 连续性;当 $-3 < v < 0$ 时,生成曲线有 C^3 连续性。

鉴于此,依次将 $u = -1$ 情形下的 v 赋值为 $-15, -10, -5, -2, 2, 10$ 进行数值实验,图 1 中生成曲线分别为 $C^0, C^1, C^2, C^3, C^2, C^1$ 阶连续。从图 1 可以看出,给定 u 值后,随着 v 值的增大,极限曲线呈现出不断向内收缩的趋势,图 1d 具有最高连续性。

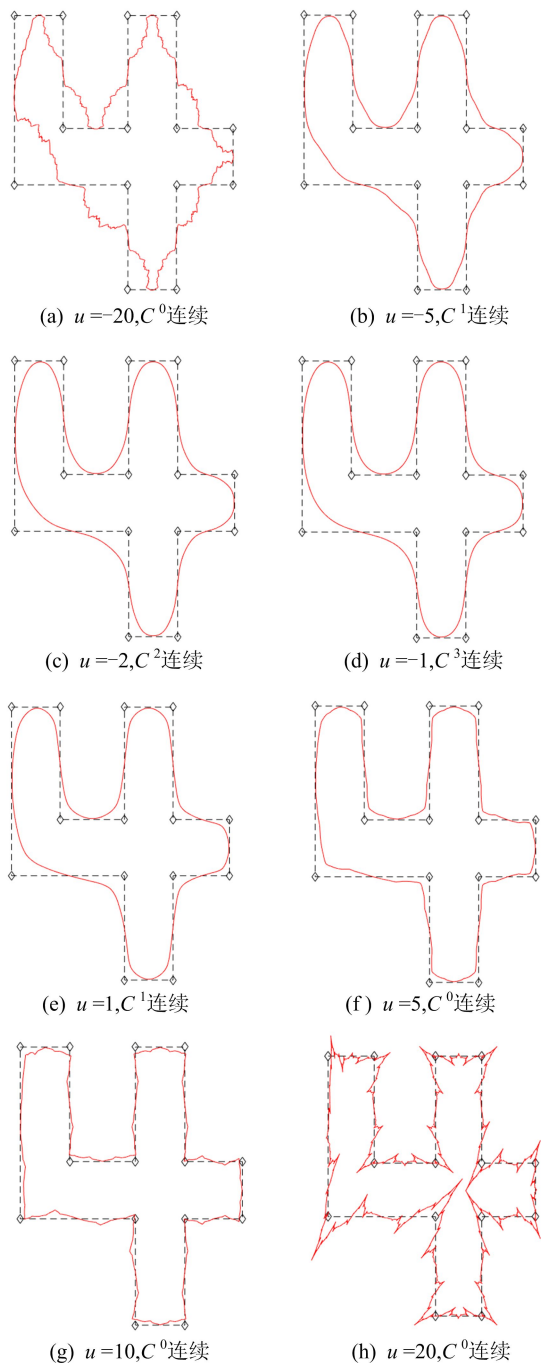


图 2 $v = -2$ 时四重细分格式 $S_{u,v}$ 生成的极限曲线

类似地,固定 v 值为 -2 ,由表 1 解出不同

u 值对连续性的影响为:当 $-35 < u < 29$ 时,生成曲线有 C^0 连续性;当 $-11 < u < 5$ 时,生成曲线有 C^1 连续性;当 $-\frac{26}{9} < u < \frac{2}{3}$ 时,生成曲线有 C^2 连续性;当 $-\frac{3}{2} < u < -\frac{2}{3}$ 时,生成曲线有 C^3 连续性。依次将 $v = -2$ 情形下的 u 赋值为 $-20, -5, -2, -1, 1, 5, 10, 20$ 进行数值实例分析,图 2 中生成曲线分别为 $C^0, C^1, C^2, C^3, C^1, C^0, C^0, C^0$ 阶连续。

从图 2 可以看出,给定 v 值后,随着 u 值的增大,极限曲线呈现出不断向外扩张的趋势,图 2d 具有最高连续性。

当 $v = -2, u = 20$ 时已经初步出现分形现象,曲线尖锐性质较明显,并会随着 u 值的递增越来越突出。

5 结 论

本文借助反向构造和倍乘平滑因子操作提出一种双参数四重细分法,运用生成多项式理论给出使该四重细分法达到 $C^0 \sim C^3$ 连续的具体参数取值区间,采用数值实例研究各参数对形成曲线的影响,分析不同参数取值下该细分法 C^k 连续性的变化情况和极限曲线生成的变化细节。

[参 考 文 献]

- [1] CHAIKIN G M. An algorithm for high-speed curve generation[J]. Computer Graphics and Image Processing, 1974, 3(4): 346-349.
- [2] 郑红婵,叶正麟,赵红星. 双参数四点细分法及其性质[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(8): 1140-1145.
- [3] MUSTAFA G, KHAN F. A new 4-point quaternary approximating subdivision scheme[J]. Abstract and Applied Analysis, 2009, 2009: 1-15.
- [4] 胡玫瑰,郑红婵,许婷,等. 静态 ternary 逼近细分格式的连续性分析和构造[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(9): 167-170.
- [5] TONG G Y, TAN J Q, SUN J Z. A quaternary four-point approximating subdivision scheme[C]//Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Manufacturing Technology (ICIEMT 2014). Balkema; CRC Press, 2014: 193-197.
- [6] 闫飞一,郑红婵. 非静态混合细分法[J]. 图学学报, 2015, 36(2): 178-185.
- [7] 马欢欢,张莉,唐烁,等. 一类融合逼近和插值的曲线细分[J]. 计算数学, 2019, 41(4): 367-380.
- [8] 吴月旺,唐烁. 五点二重融合型细分法[J]. 大学数学, 2020, 36(3): 1-7.

- [9] TAN J Q, TONG G Y. A nonstationary ternary 4-point shape-preserving subdivision scheme[J]. *Journal of Mathematics*, 2021, 2021: 1-10.
- [10] DYN N. Subdivision schemes in CAGD[J]. *Advances in Numerical Analysis*, 1992, 2: 36-104.
- [11] REHAN K, SABRI M A. A combined ternary 4-point subdivision scheme[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 276: 278-283.
- [12] SIDDIQI S S, YOUNIS M. The m -point quaternary approximating subdivision schemes[J]. *American Journal of Computational Mathematics*, 2013, 3: 6-10.
- [13] BADOUAL A, ROMANI L, UNSER M. Active subdivision surfaces for the semiautomatic segmentation of biomedical volumes[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2021, 30: 5739-5753.
- [14] NOVARA P, ROMANI L. Complete characterization of the regions of C2 and C3 convergence of combined ternary 4-point subdivision schemes[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2016, 62: 84-91.

(责任编辑 闫杏丽)

(上接第 822 页)

MoS₂-In 和 MoS₂-Au 异质结的界面构型对界面势垒的影响,得到的结论如下。

1) MoS₂-In 与 MoS₂-Au 异质结形成的是范德华接触,与实验观测结果一致。

2) 界面势垒对构型表现出明显不同的依赖性,并可从界面 In 原子和 Au 原子电子态空间分布的各向异性和各向同性对依赖性给予理解。

3) MoS₂-In 和 MoS₂-Au 异质结的界面势垒明显偏离 Schottky-Mott 定则的预测值,这种偏离由界面电荷转移形成的偶极层决定,界面构型不同,偶极层强弱不同。

研究表明,调控 MoS₂-In 与 MoS₂-Au 范德华异质结界面构型可以调控偶极层,进而调控界面势垒。本文研究结果可为实验上调控和改进基于 MoS₂ 的器件性能提供重要的理论参考。

[参 考 文 献]

- [1] SAPTRASHI D, AMRITANAND S, ERIC P, et al. Transistors based on two-dimensional materials for future integrated circuits [J]. *Nature Electronics*, 2021, 4: 786-799.
- [2] SHEN P C, SU C, LIN Y X, et al. Ultralow contact resistance between semimetal and monolayer semiconductors [J]. *Nature*, 2021, 593: 211-217.
- [3] WANG Y, KIM J C, WU R J. Van der Waals contacts between three-dimensional metals and two-dimensional semiconductors [J]. *Nature*, 2019, 568: 70-74.
- [4] LIU Y, GUO J, ZHU E B, et al. Approaching the Schottky-Mott limit in van der Waals metal-semiconductor junctions [J]. *Nature*, 2018, 557: 696-700.
- [5] LI S Y, MA Y, NABONSWENDE A N O, et al. p-/n-Type modulation of 2D transition metal dichalcogenides for electronic and optoelectronic devices [J]. *Nano Research*, 2022, 15(1): 123-144.
- [6] WANG Q Q, CAO L M, LIANG S J, et al. Efficient Ohmic contacts and built-in atomic sublayer protection in MoSi₂N₄ and WS₂N₄ monolayers [J]. *npj 2D Materials and Applications*, 2021, 5: 71(2021).
- [7] CHIT S L, JING Y C, YEE S A, et al. Quantum transport in two-dimensional WS₂ with high-efficiency carrier injection through indium alloy contacts [J]. *ACS Nano*, 2020, 14(10): 13700-13708.
- [8] 张亚东, 贾昆鹏, 吴振华, 等. 二硫化钨场效应晶体管金属接触的研究进展 [J]. *微纳电子技术*, 2020, 57(2): 109-118.
- [9] LIU Y, ZHANG Q, ZHANG W D, et al. Tuning Schottky barrier and contact type of Metal-Semiconductor in Ti₃C₂T₂/MoS₂ (T=F, O, OH) by strain: a first-principles study [J]. *Journal of Physical Chemistry C*, 2021, 125: 16200-16210.
- [10] KIM B K, KIM T H, CHOI D H, et al. Origins of genuine Ohmic van der Waals contact between indium and MoS₂ [J]. *npj 2D Materials and Applications*, 2021, 5: 9(2021).
- [11] ZHAO N, DUO S. Dipole-induced Ohmic contacts between monolayer Janus MoSSe and bulk metals [J]. *npj 2D Materials and Applications*, 2021, 5: 72(2021).

(责任编辑 胡亚敏)