

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2024.12.008

# 含初始裂纹的 V 型切口复合材料应力场和 疲劳评估方法研究

湛 伟, 高 翔, 徐双喜, 邱 屹, 陈昱文

(武汉理工大学 船海与能源动力工程学院, 湖北 武汉 430063)

**摘 要:**在结构连接甚至微结构中大量存在切口,切口附近的应力集中现象会明显降低结构的承载能力,严重影响结构的疲劳性能。文章对含切口复合材料结构的切口应力场和疲劳评估方法进行研究,推导含初始裂纹复合材料 V 型切口应力场半解析简易公式,并通过试验验证了简易公式能有效地反映构件的受力情况,表明该简易公式能精确地预报切口根部应力场和应力强度因子。最后基于 V 型切口板裂纹扩展试验数据,结合 Pairs 公式和应力场简易评估公式,拟合得到各向异性材料含初始裂纹的双边 V 型切口构件的裂纹扩展模型。

**关键词:**各向异性材料;初始裂纹;切口应力场;应力强度因子;裂纹扩展模型

中图分类号:TB332

文献标志码:A

文章编号:1003-5060(2024)12-1636-07

## A study on stress field and fatigue evaluation method of V-notch composite materials with initial cracks

SHEN Wei, GAO Xiang, XU Shuangxi, QIU Yu, CHEN Yuwen

(School of Naval Architecture, Ocean and Energy Power Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China)

**Abstract:** There are numerous notches in structural connections and even microstructures, and stress concentration near the notches can significantly reduce the load-bearing capacity of the structure, seriously affecting its fatigue performance. This paper focuses on the research of notch stress field and fatigue evaluation method of composite structures with notches, deduces the semi-analytical simple formula of V-notch stress field of composite materials with initial cracks, and verifies the simple formula through experiments. It is verified that the simple formula can effectively reflect the stress situation of components, which shows that the simple formula introduced in this paper can accurately predict the stress field and stress intensity factor at the root of notches. Finally, based on the experimental data of crack propagation in V-notch plates, combined with Pairs formula and stress field simplified evaluation formula, a crack propagation model for anisotropic materials with bilateral V-notch components containing initial cracks was fitted.

**Key words:** anisotropic materials; initial crack; notch stress field; stress intensity factor; crack propagation model

复合材料是一种先进的轻量化材料,在航空航天和海洋结构材料中得到越来越广泛的应用。轻量化结构内部构件承受的主要载荷是重复疲劳

载荷,在疲劳载荷作用下,复合材料层合板材料性能下降、损伤不断累积,最终导致整体失效<sup>[1]</sup>。而在结构连接处甚至微结构中大量存在切口、孔洞、

收稿日期:2023-09-26;修回日期:2023-11-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51979209)

作者简介:湛 伟(1986—),男,湖北随州人,博士,武汉理工大学副教授,硕士生导师。

沟槽等几何不连续的情况,会造成局部应力集中。切口附近的应力集中现象会明显降低结构的承载能力,严重影响结构的疲劳性能<sup>[2]</sup>。切口根部附近的高应力区容易造成裂纹的萌生和扩展,最终导致构件失效<sup>[3]</sup>。尖锐 V 型切口是常见的应力集中区域,为了预测 V 型切口构件的疲劳寿命,需要准确分析裂纹尖端处的应力场和应力强度<sup>[4]</sup>。

切口构件的疲劳寿命不仅依赖于其端部萌生的裂纹的尖端应力,也依赖于切口端部附近的应力梯度场。文献[5]将传统的应力强度因子概念扩展到切口构件,提出了切口应力强度因子(N-SIF)的概念;文献[6]给出了各向同性材料、0°和 90°单向纤维增强石墨/环氧复合材料在某些特殊裂纹开口角下的 N-SIF 值;文献[7]研究了考虑各向同性和各向异性材料的多材料 V 型缺口板的奇异行为。

在实际工程中,经常会出现含初始裂纹的切口构件,在这种情况下,切口构件的寿命将由于裂纹的存在而降低,因此,对于含初始裂纹的切口构件的应力场预报及寿命评估也具有一定的工程意义。文献[8]为存在于尖锐、半无限缺口尖端的有限长度裂纹找到裂纹尖端应力强度因子的校准;文献[9]基于量纲分析的推广研究了含尖端裂纹 V 型切口的半无限平板,给出了裂纹尖端微裂纹与半板裂纹的应力强度的差异;文献[10]提出了反映切口效应对疲劳裂纹扩展寿命影响的切口结构应力法。

目前,对 V 型切口应力强度因子的研究主要针对各向同性材料,对各向异性材料或复杂载荷的 N-SIF 评价有待进一步研究。已有研究提出了一些确定各向异性材料 V 型切口 N-SIF 数值解的方法,但这些方法普遍存在计算量大、通用性弱的问题,不便于实际工程应用,因此有必要构建各向异性材料切口应力场的简易评估模型。因此,本文引入奇异强度因子的概念<sup>[11]</sup>,推导了评估含初始裂纹复合材料板 V 型切口应力场简易公式,并通过开展一系列 V 型切口板强度和疲劳试验对所推导的简易公式的预报结果进行验证。最后,基于 V 型切口板裂纹扩展试验数据,结合 Pairs 公式和应力场简易评估公式,拟合得到各向异性材料含初始裂纹的双边 V 型切口构件的裂纹扩展模型。

## 1 拉伸载荷下 V 型切口应力场

V 型切口板的几何模型如图 1a 所示,文献

[12]考虑了材料力学参数的影响,推导出各向异性 V 型切口附近高应力区域的 I 型应力公式,具体如下:

$$\sigma_{\theta} = \frac{r^{\lambda_1-1} K_I^V}{\sqrt{2\pi}(1+\chi_1)} \{ \rho_1^{\lambda_1-1} [m_{11\theta} \cos((1-\lambda_1)\theta_1) + m_{12\theta} \sin((1-\lambda_1)\theta_1)] + \rho_2^{\lambda_1-1} \chi_1 \times [m_{21\theta} \cos((1-\lambda_1)\theta_2) + m_{22\theta} \sin((1-\lambda_1)\theta_2)] \} \quad (1)$$

其中,  $K_I^V$  为 V 型切口应力强度因子。

考虑模型的切口深度  $l$  和其他几何尺寸的影响,  $K_I^V$  的表达式可以简化为  $K_I^V = f_1 \sigma_0 \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_1}$ 。

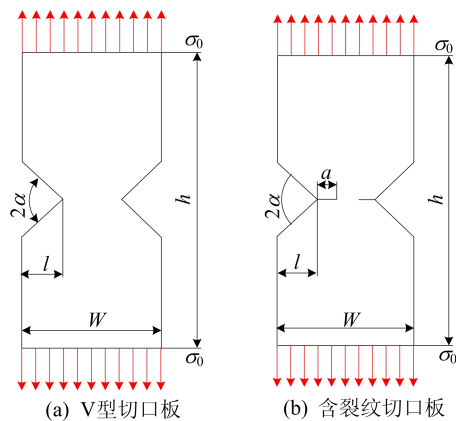


图 1 几何模型

对于各向异性材料,应力奇异特征值受到张开角和材料弹性特性 2 个因素的共同影响,计算公式如下:

$$\cos[(1-\lambda_1)\theta_2(\gamma)] \{ \cos[(1-\lambda_1)\theta_1(\gamma)] \times [m_{11\theta}(\gamma)m_{21\theta}(\gamma) - m_{21\theta}(\gamma)m_{11\theta}(\gamma)] - \sin[(1-\lambda_1)\theta_1(\gamma)] [m_{21\theta}(\gamma)m_{12\theta}(\gamma) - m_{12\theta}(\gamma)m_{21\theta}(\gamma)] \} - \sin[(1-\lambda_1)\theta_2(\gamma)] \times \{ \cos[(1-\lambda_1)\theta_1(\gamma)] [m_{22\theta}(\gamma)m_{11\theta}(\gamma) - m_{11\theta}(\gamma)m_{22\theta}(\gamma)] - \sin[(1-\lambda_1)\theta_1(\gamma)] \times [m_{12\theta}(\gamma)m_{22\theta}(\gamma) - m_{22\theta}(\gamma)m_{12\theta}(\gamma)] \} = 0 \quad (2)$$

其中:  $\lambda_1$  为第 1 个正特征根<sup>[13]</sup>;  $\gamma$  为与张开角  $2\alpha$  有关的参数。

各向异性材料参数对切口应力场的影响用等效材料参数  $\Psi$  表征,即

$$\Psi = \left( 2\sqrt{\frac{E_y}{E_x}} - 2\nu_{yx} + \frac{E_y}{G_{xy}} \right)^{-1} \quad (3)$$

在裂纹扩展的过程中,垂直裂纹扩展方向应力起主导作用<sup>[14]</sup>。在式(1)中,将所有由切口深度  $l$ 、张开角  $2\alpha$ 、材料特性  $\Psi$  以及模型几何尺寸决定的因素用一个复杂函数  $C_1(2\alpha, \theta, \Psi)$  表示。

式(1)可简化为:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{r^{p_1}} [C_1(2\alpha, \theta, \Psi) f_1^{1/p_1} l]^{p_1} \quad (4)$$

其中:  $p_1 = 1 - \lambda_1$ ;  $C_1(2\alpha, \theta, \Psi) = \left\{ \frac{1}{(1 + \chi_1)} \times \left[ \frac{m_{11\theta} \cos((1 - \lambda_1)\theta_1) + m_{12\theta} \sin((1 - \lambda_1)\theta_1)}{\rho_1^{p_1}} + \frac{m_{21\theta} \cos((1 - \lambda_1)\theta_2) + m_{22\theta} \sin((1 - \lambda_1)\theta_2)}{\rho_2^{p_1}} \chi_1 \right] \right\}^{\frac{1}{p_1}}$ .

为简化计算,引入应力奇异强度值  $a_{s1}$ ,其计算公式为:

$$a_{s1} = C_1(2\alpha, \theta, \Psi) f_1^{1/p_1} l \pi^{-1/(2p_1)} \quad (5)$$

对于给定的张开角,切口角平分线上( $\theta = 0^\circ$ )复杂的应力公式可简化为:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \left( \frac{a_{s1}}{r} \right)^{p_1} \quad (6)$$

同时,V型切口应力强度因子  $K_I^V$  表达式为:

$$K_I^V = \sqrt{\pi} \sigma_0 a_{s1}^{1-\lambda_1} \quad (7)$$

因此,如果能够得到  $a_{s1}$  的计算公式,那么代入式(7)即可得到 V 型切口应力强度因子  $K_I^V$ 。

参考边裂纹应力强度因子公式,V型切口应

$$Y_{I,m} = \begin{cases} 10^{(-0.7p_1-0.1)\lg(a/l)+(-0.39p_1^2+0.11p_1+0.167)}, & l/W \leq 0.1; \\ 10^{(-0.7p_1-0.1)\lg(a/l)+(-0.39p_1^2+0.11p_1+0.167)} \times \\ [6.65(l/W)^2 - 1.53(l/W) + 1.09], & l/W > 0.1 \end{cases} \quad (11)$$

## 2 试验验证

通过开展一系列典型复合材料 V 型切口板强度和疲劳试验,对简易公式(11)的预报结果进行验证。试验采用玻纤与芳纶(两者质量比 1:1)复合材料板,试件的铺层设置为  $0^\circ$  玻纤 6 层,  $0^\circ$  芳纶 3 层,黏合剂为 QC350 树脂,试件纤维方向与拉伸轴垂直。首先通过基本力学性能试验获取材料的弹性模量  $E_x$ 、 $E_y$ ,泊松比  $\nu$ ,剪切模量  $G$ ;其次通过含初始裂纹切口构件的应变测量试验,验证本文推导的含初始裂纹的 V 型切口复合材料应力场简易公式评估的应力场。

### 2.1 基本力学性能试验

拉伸试件尺寸如图 2 所示。试件总长度为 250 mm,宽度为 25 mm,工作段长为 150 mm,在试件两端各设置 50 mm 的加持区,加持区加强片的尺寸为 50 mm × 25 mm × 3 mm。

为了测量静态拉伸中横向和纵向的应变,在每个试件中部各贴 2 个横向和纵向的应变片,应变片布置如图 3 所示。试验过程中,加载速度全

力强度因子  $K_I^V$  的计算公式<sup>[15]</sup>为:

$$K_I^V = Y_I^V \sqrt{\pi} \sigma_0 l^{1-\lambda_1} \quad (8)$$

其中: $l$  为切口深度; $Y_I^V$  为几何修正因子。

此外, $Y_I^V$  也可以定义成无量纲化 V 型切口应力强度因子, $Y_I^V$  与  $a_{s1}$  的关系可表示为:

$$Y_I^V = \left( \frac{a_{s1}}{l} \right)^{1-\lambda_1} \quad (9)$$

分析 V 型切口构件的长宽比、切口深度、切口深度与板宽之比、张开角 4 个几何尺寸对切口应力场的影响,经过有限元方法拟合得到奇异强度值  $a_{s1}$  的简易计算公式为:

$$\lg(a_{s1}/l) = [-35.94(l/W)^3 - 3.91(l/W)^2 + 1.03(l/W) - 2.75] \lg p_1 + [-6.52(l/W)^3 - 1.07(l/W)^2 + 0.164(l/W) - 0.73] \quad (10)$$

含裂纹切口板几何模型如图 1b 所示。本文基于 Irwin 推导出裂纹尖端附近处的应力场公式,在大量数值模拟的基础上分析几何尺寸和构件材料力学参数对应力强度因子的影响,并在此基础上拟合得到拉伸载荷下含初始裂纹 V 型切口构件  $Y_I$  简易公式为:

程保持在 2 mm/min,一直加载到试件断裂,得到力-位移曲线如图 4 所示。



图 2 拉伸试件尺寸示意图

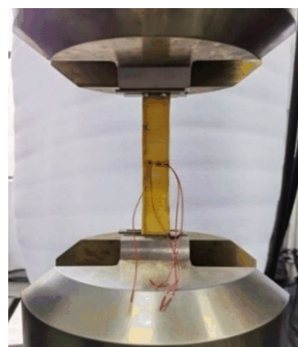


图 3 拉伸试件加持以及应变片布置

试验过程按现象大致分为 3 个阶段:第 1 阶段,试件无明显变化,力-位移曲线呈上升趋势;

第 2 阶段,试件开始发出清脆的纤维断裂声音,随着位移增加,力没有发生明显变化;第 3 阶段,试件出现明显泛白区域,频繁发出纤维断裂的声音,直至试件破坏,此时力-位移曲线上升。

破坏后的试件如图 5 所示,试件主要以分层破坏为主。

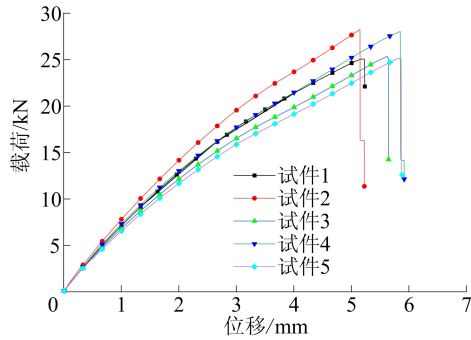


图 4 力-位移曲线

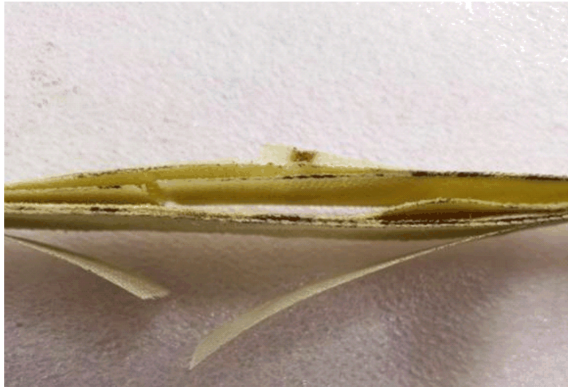


图 5 破坏后的拉伸试件

静态拉伸试验得到的破坏载荷和破坏强度见表 1 所列。由表 1 可知,5 个试件的破坏应力相差不大,离散系数为 3.625%,说明试验数据可靠性较高。

表 1 拉伸试验结果

试件编号	破坏载荷/kN	破坏强度/MPa	平均破坏强度/MPa	离散系数/%
1	25.076 32	409.841		
2	28.240 35	401.544		
3	25.333 25	438.148	418.546	3.625
4	28.038 96	430.347		
5	25.172 49	412.847		

弦向模量计算应变范围为起点  $1\ 000 \times 10^{-6}$ , 终点  $3\ 000 \times 10^{-6}$ 。拉伸弹性模量和泊松比计算公式如下:

$$E^{\text{chord}} = \Delta\sigma / \Delta\varepsilon \quad (12)$$

$$\nu = -\Delta\varepsilon_t / \Delta\varepsilon_l \quad (13)$$

其中:  $E^{\text{chord}}$  为弦向拉伸弹性模量;  $\Delta\sigma$  为两应变点之间拉伸应力的差值;  $\Delta\varepsilon$  为两应变点之间应变的差值。

弹性模量计算结果见表 2 所列。

表 2 拉伸弹性模量计算结果

试件编号	拉伸弹性模量/GPa	平均拉伸弹性模量/GPa	离散系数/%
1	25.132 818		
2	23.017 417		
3	24.126 761	24.001 092	3.357
4	23.480 428		
5	24.248 037		

## 2.2 应变测试

为了验证简易公式的预报结果,选取典型切口试件在线弹性范围内进行拉伸试验,得到实际切口构件的应变,并将有限元仿真得到的应变与试验测得的应变进行对比。切口应变试验的试件具体尺寸见表 3 所列。

表 3 切口应变试验构件尺寸

试件编号	宽度/mm	厚度/mm	切口深度/mm	裂纹长度/mm	张开角/(°)
1	67.36	2.51	8.59	2.28	105
2	70.77	2.58	5.94	2.56	90

试验过程中保持加载速度为 50 N/s,一直加载到外力达到 2 000 N。其中一个试件的应力-应变曲线如图 6 所示,其余试件的应力-应变曲线与之类似。

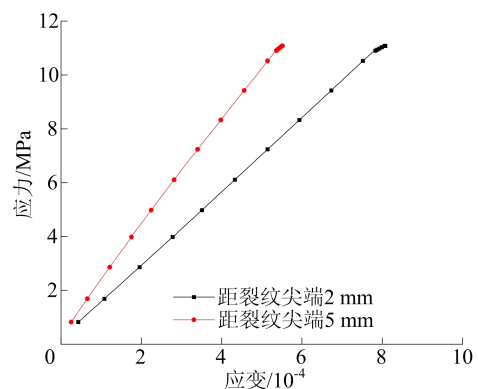


图 6 切口试件应力-应变曲线

## 2.3 简易公式结果验证

由于各向异性材料存在耦合效应,应力、应变关系复杂<sup>[16]</sup>,测量试验所得的应变场,并与本文推导的含初始裂纹复合材料板 V 型切口应力场简易公式计算得到的应变场进行对比,结果如

图 7所示。

从图 7 可以看出,最大应变误差为-3.94%,出现在试件 2 距裂尖 2 mm 处的测点。

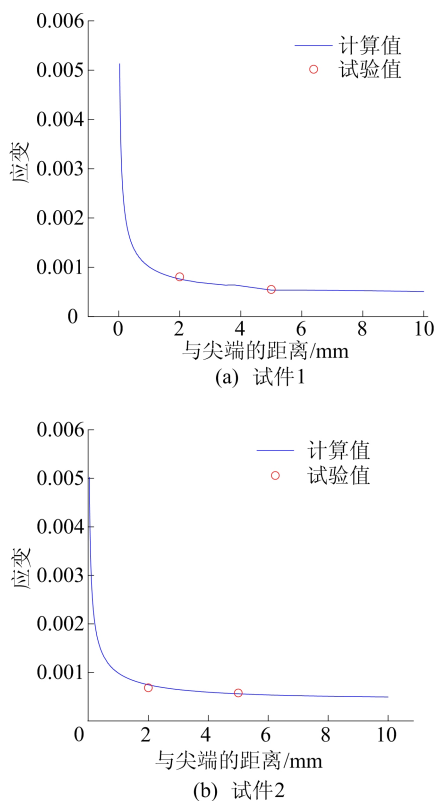


图 7 不同试件简易公式与试验所得应变对比

对于确定的含初始裂纹 V 型切口构件,求解出  $Y_I$  即可推算出 N-SIF 值和裂尖应力场。本文通过试验验证了简易公式计算的应力场能有效地反映构件的受力情况,验证结果表明本文所介绍的简易公式能精确地预报切口根部应力场和应力强度因子。

### 3 裂纹扩展模型

对于单轴疲劳,Pairs 公式<sup>[17]</sup>形式简单,并且

能准确地描述疲劳裂纹扩展的稳定阶段,能够满足一般结构的疲劳设计需要以及校核需求。

Pairs 公式可以表达为裂纹增长速率  $\frac{da}{dN}$  和应力强度因子  $K$  之间的关系,即

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (14)$$

其中:  $a$  为裂纹长度;  $N$  为疲劳载荷循环次数;  $\frac{da}{dN}$  为裂纹扩展速率;  $K$  为应力强度因子;  $C$  和  $m$  为材料参数。

裂纹从初始长度  $a_0$  增长到长度  $a_c$  时,其疲劳寿命如下:

$$N = \frac{1}{C} \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{(\Delta K)^m} \quad (15)$$

通过对典型复合材料板进行裂纹扩展试验,得到典型复合材料板的材料参数  $C$  和  $m$ ,进而得到含切口复合材料板的扩展模型。

#### 3.1 疲劳裂纹扩展试验

本试验采用正弦波加载、恒幅疲劳试验,应力比  $R=0.1$ ,频率为 8 Hz。试验试件是由玻纤与芳纶复合材料板制成的含初始裂纹双边 V 型切口构件,共 3 根,具体尺寸见表 4 所列。

表 4 疲劳试件尺寸

试件编号	测点宽度/mm	测点厚度/mm	切口深度/mm	裂纹长度/mm	张开角/°
1	70.54	2.59	9.65	2.38	90
2	68.75	2.52	6.51	3.08	110
3	73.16	2.58	9.74	0	95

试验发现 3 根试件的试验现象规律基本一致。试件 3 的裂纹扩展过程如图 8 所示,3 个试件的断口形状如图 9 所示。

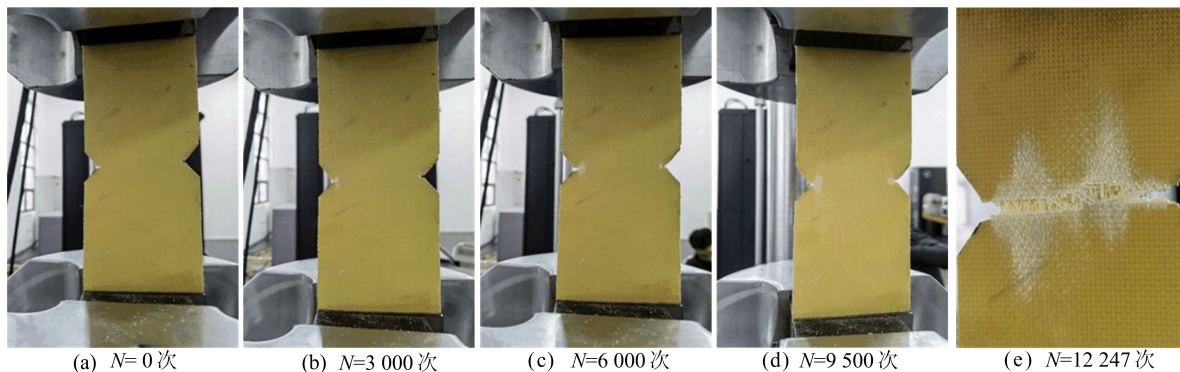
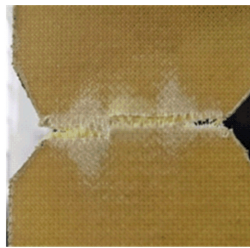
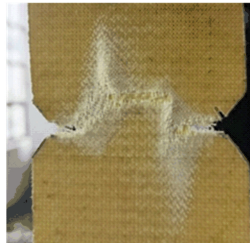


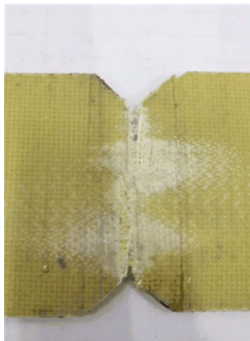
图 8 试件 3 裂缝扩展过程



(a) 试件1断口



(b) 试件2断口



(c) 试件3断口

图 9 3 个试件断口形状

### 3.2 裂纹扩展模型拟合

不同试件的  $a-N$  曲线如图 10 所示。对  $a-N$  曲线逐点求解微分  $da/dN$ , 并求解各试件在不同裂纹扩展阶段的  $\Delta K$ , 对每个试件的  $da/dN-\Delta K$  数据用最小二乘法拟合, 得到材料的参数  $C$  和  $m$ , 见表 5 所列。

为了确保模型预报精确性的前提下尽可能缩小  $C$  和  $m$  的变化范围, 本文在裂纹扩展模型的拟合中采用平均值拟合的模型对各试件进行寿命预报, 结果见表 6 所列。

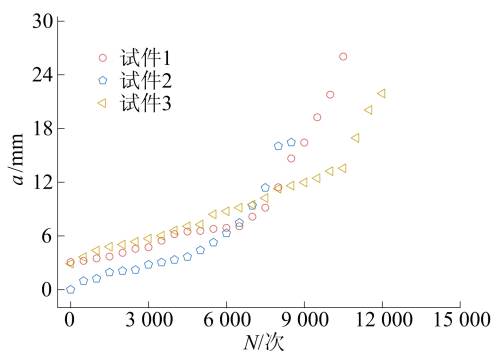


图 10 试件的  $a-N$  曲线

表 5 材料参数  $C, m$  拟合值

试件编号	$m$	$C/10^{-44}$
1	14.554 4	1.77
2	14.496 6	2.06
3	14.358 9	3.12
平均值	14.469 8	2.32

表 6 平均值拟合模型预报结果

试件编号	实际断裂寿命	模型预报断裂寿命
1	10 764	11 171
2	8 842	9 774
3	12 247	14 257

结合表 5 和表 6, 得到对于本试验采用的典型复合材料板基于 Pairs 公式的裂纹扩展模型, 在 Pairs 公式中,  $m$  为 14.358 9~14.554 4,  $C$  为  $1.77 \times 10^{-44} \sim 3.12 \times 10^{-44}$ ,  $\Delta K$  取决于外加载荷和试件的几何形状, 由式(8)和式(11)计算得到。在大量疲劳裂纹扩展试验数据的基础上, 结合 Pairs 公式, 得到了含 V 型切口和初始裂纹复合材料板的裂纹扩展模型。

## 4 结 论

本文基于传统各向异性 V 型切口应力场公式, 引入奇异强度值  $a_{s1}$ , 推导了拉伸载荷下含初始裂纹的 V 型切口构件的切口应力场及 N-SIF 简易计算公式。基于典型含初始裂纹 V 型切口复合材料板裂纹扩展试验, 结合应力场简易评估公式和 Pairs 公式对其应力强度因子进行预报, 得到了各向异性材料含初始裂纹的双边 V 型切口构件的裂纹扩展模型。

### [参 考 文 献]

- [1] WU Z, LIU Y. Analytical solution for the singular stress distribution due to V-notch in an orthotropic plate material [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75 (8): 2367-2384.
- [2] 宋鸣, 李有堂. 双材料 V 型切口断裂研究[J]. 科技导报, 2009, 27(11): 60-63.
- [3] ZAPPALORTO M. Mode I generalised stress intensity factors for rounded notches in orthotropic plates[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2019, 101: 356-364.
- [4] 谌伟, 殷乐, 左某, 等. 基于奇异强度因子的 V 型切口应力场和 N-SIF 评估方法[J]. 固体力学学报, 2022, 43(5): 636-645.

(下转第 1692 页)

- oblique loads [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1973, 10(1):64-70.
- [3] 罗少锋, 杨文星. 上拔与水平力组合作用下单桩静载试验 [J]. 工程勘察, 2012, 40(6):1-4.
- [4] RAMADAN M I, BUTT S D, POPESCU R. Offshore anchor piles under mooring forces; numerical modeling [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2013, 50(2):189-199.
- [5] RAMADAN M I, BUTT S D, POPESCU R. Offshore anchor piles under mooring forces: centrifuge modeling [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2013, 50(4):373-381.
- [6] REDDY K M, AYOTHIRAMAN R. Experimental studies on behavior of single pile under combined uplift and lateral loading [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2015, 141(7):04015030.
- [7] SCHMERTMANN J H. Discussion of "experimental studies on behavior of single pile under combined uplift and lateral loading" by K. Madhusudan Reddy and R. Ayothiraman [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2016, 142(8):07016015.
- [8] 何思明. 抗拔桩破坏特性及承载力研究 [J]. 岩土力学, 2001, 22(3):308-310.
- [9] 曹卫平, 秦强毅, 赵敏. 砂土中抗拔斜桩性状模型试验研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(1):3124-3133.
- [10] 吴江斌, 王卫东, 黄绍铭. 扩底抗拔桩扩大头作用机制的数值模拟研究 [J]. 岩土力学, 2008, 29(8):2115-2120.
- [11] 王梓龙, 裴向军, 刘瑶, 等. 嵌岩扩底短桩抗拔承载性能现场试验研究及数值模拟 [J]. 长江科学院院报, 2020, 37(5):139-144.
- [12] ROBINSKY E I, MORRISON C F. Sand displacement and compaction around model friction piles [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1964, 1(2):81-93.
- [13] CHANDRASEKARAN S S, BOOMINATHAN A, DOD-AGO-UDAR G R. Group interaction effects on laterally loaded piles in clay [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(4):573-582.
- [14] 曹卫平, 夏冰, 赵敏, 等. 砂土中水平受荷斜桩的  $p-y$  曲线及其应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(3):743-753.
- [15] 赵明华, 李微哲, 杨明辉, 等. 成层地基中倾斜偏心荷载下基桩位移特性室内模型试验研究 [J]. 土木工程学报, 2006, 39(12):95-99.
- [16] 柳晓, 科鹿群, 路士伟, 等. 低裙式吸力桩真空沉贯力及抗拔承载力 [J]. 岩土力学, 2018, 39(6):2089-2098.
- [17] 余江来, 张少钦, 陈乐意, 等. 等截面嵌岩桩抗拔承载性状试验与数值分析 [J]. 南昌航空大学学报(自然科学版), 2018, 32(3):19-25.

(责任编辑 吴亮)

## (上接第 1641 页)

- [5] GROSS B, MENDELSON A. Plane electrostatic analysis of V-notched plates [J]. International Journal of Fracture, 1972, 8(3):267-276.
- [6] SHIPMAN B H. Calculation of the generalized stress intensity factors for a V-notched anisotropic body [D]. Raleigh: North Carolina State University, 2002.
- [7] YAO S L, ZAPPALORTO M, PAN W, et al. Two dimensional displacement and stress fields for tri-material V-notches and sharp inclusions in anisotropic plates [J]. European Journal of Mechanics A (Solids), 2020, 80:103927.
- [8] PHILIPPS A G, KARUPPANAN S, CHURCHMAN C M, et al. Crack tip stress intensity factors for a crack emanating from a sharp notch [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75(18):5134-5139.
- [9] LOU B Q, BARLTROP N. Physical differences between models of an infinitesimal crack at a V-notch edge and a crack emanating from a V-notch tip along with their approximate solutions [J]. International Journal of Solids & Structures, 2021, 219:1-10.
- [10] YU Y F, PEI X J, WANG P, et al. A structural stress approach accounting for notch effects on fatigue propagation life: part I theory [J]. International Journal of Fatigue, 2022, 159:106793.
- [11] SHEN W, CHEN Y W, FU H Q, et al. A semi-analytical formula for estimating notch stress field and N-SIF of double edge V-notched orthotropic thin plate [J]. Archive of Applied Mechanics, 2022, 92(6):1729-1755.
- [12] ZAPPALORTO M, CARRARO P A. Stress fields at sharp angular corners in thick anisotropic composite plates [J]. Composite Structures, 2014, 117(1):346-353.
- [13] ZAPPALORTO M, CARRARO P A. Effect of material orthotropy on the notch stress intensity factors of sharp V-notched plates under tension [J]. Theoretical & Applied Fracture Mechanics, 2019, 104:102375.
- [14] 葛大丽. 双材料反平面 V 形切口应力奇性指数的计算 [J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2010, 33(11):1677-1680.
- [15] 王强. 含 V 型切口结构强度与疲劳寿命研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2013.
- [16] SHEN W, CHEN Y W, LI G R, et al. Semi-empirical formulas on notch stress field and SIF of orthotropic V-shaped thin plate with initial crack under tensile-bending loads [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2023, 281:109040.
- [17] PARIS P, ERDOGAN F. A critical analysis of crack propagation laws [J]. Journal of Fluids Engineering, 1963, 85(4):528-533.

(责任编辑 闫杏丽)