

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2024.01.003

# 基于双环自适应滑模的移动机器人轨迹跟踪控制

张鑫<sup>1</sup>, 秦东晨<sup>2</sup>, 谢远龙<sup>1,3</sup>, 王书亭<sup>1</sup>

(1. 华中科技大学 机械科学与工程学院, 湖北 武汉 430074; 2. 郑州大学 机械与动力工程学院, 河南 郑州 450001; 3. 武汉工程大学 智能机器人湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430074)

**摘要:** 为了提升移动机器人轨迹跟踪精度, 针对传统双环控制内外环协调性差、抗扰性弱的问题, 文章提出双环自适应滑模的控制方法。为消除传统滑模控制(sliding mode control, SMC)方法中的趋近阶段, 设计新型时变积分终端滑模控制器以保证系统状态始终位于滑模面, 并通过控制器参数调节实现内环姿态误差和外环位置误差的快速收敛; 构建基于势垒函数的增益调控方法, 保证在扰动上界未知的情况下有效地抑制状态抖振, 提高轨迹跟踪系统的抗干扰能力。对所提方法进行的验证分析结果表明, 相较于现有的双环控制方法, 该文轨迹跟踪控制方法精度更高、鲁棒性更强。

**关键词:** 移动机器人; 轨迹跟踪; 双环自适应滑模控制(SMC); 势垒函数

**中图分类号:** TP242 **文献标志码:** A **文章编号:** 1003-5060(2024)01-0013-08

## Trajectory tracking control of mobile robot via double-loop adaptive sliding mode strategy

ZHANG Xin<sup>1</sup>, QIN Dongchen<sup>2</sup>, XIE Yuanlong<sup>1,3</sup>, WANG Shuting<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. School of Mechanical and Power Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China; 3. Hubei Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** To improve the trajectory tracking accuracy of mobile robots, a double-loop adaptive sliding mode control method is proposed to solve the problems of poor coordination between inner loop and outer loop and weak anti-disturbance of the traditional double-loop control. Firstly, to eliminate the reaching phase in the traditional sliding mode control(SMC) method, a new time-varying integral terminal sliding mode controller is designed to ensure that the system state is always on the sliding mode surface, and the fast convergence of the inner loop attitude error and the outer loop position error is achieved by adjusting the controller parameters. Furthermore, a gain control method based on barrier function is constructed to effectively suppress state chattering and improve the anti-disturbance capability of the trajectory tracking system when the upper bound of the disturbance is unknown. Finally, the verification results show that the proposed trajectory tracking control method has higher accuracy and stronger robustness than the existing double-loop control methods.

**Key words:** mobile robot; trajectory tracking; double-loop adaptive sliding mode control(SMC); barrier function

**收稿日期:** 2022-12-08; **修回日期:** 2023-02-05

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(52275488); 湖北省重点研发计划资助项目(2022BAA064)和智能机器人湖北省重点实验室资助项目(HBIR202309)

**作者简介:** 张鑫(1996—), 男, 河南镇平人, 华中科技大学博士生;

秦东晨(1965—), 男, 河南温县人, 博士, 郑州大学教授, 博士生导师, 通信作者, E-mail:dcqin@zhu.edu.cn;

王书亭(1968—), 男, 河南方城人, 博士, 华中科技大学教授, 博士生导师。

移动机器人在操作安全性、工作一致性和生产效率方面具备显著优势,被广泛应用于制造车间物料运输和上下料任务<sup>[1]</sup>,但生产车间操作平台布局紧凑、运行空间狭窄多变,这对移动机器人的灵活性、机动性和运行精度提出了更高的要求。

为提高移动机器人的运动控制性能,诸多控制方法得到了学术界和工业界的深入探索,包括比例积分微分(proportional integral derivative, PID)控制<sup>[2]</sup>、基于线性化的状态反馈控制<sup>[3]</sup>、预测模型控制<sup>[4-5]</sup>、模糊控制<sup>[6]</sup>、神经网络控制<sup>[7]</sup>和滑模控制(sliding mode control, SMC)<sup>[8-9]</sup>等。上述方法中,SMC对未建模动态、参数摄动和未建模误差不敏感,具有优越的抗扰动能力,因此被广泛应用于移动机器人的运动学控制。如文献<sup>[10]</sup>提出一种基于降阶扩展状态观测器的SMC方案,提高了三轮全向移动机器人在摩擦补偿方面的有效性和鲁棒性;文献<sup>[11]</sup>设计了快速终端SMC方法,增强了系统鲁棒性和轨迹跟踪的精度。

当前,移动机器人多采用耦合控制律进行单闭环控制来实现轨迹跟踪,即设计耦合滑模控制器实现对位置和姿态的同步调控<sup>[9-11]</sup>。但是该类耦合控制方法不适于跟踪误差较大的情况。相较于存在内部耦合的单闭环控制,文献<sup>[12]</sup>提出位置跟踪和姿态跟踪解耦的双闭环控制策略,优化了跟踪控制过程的协调性,提高了轨迹跟踪效率;文献<sup>[13]</sup>引入通用二型模糊逻辑对双闭环控制策略进行改进,增强了被控对象的抗干扰性能。然而,当前的双环控制策略都关注趋近律的设计,而简单地将系统误差自身设为滑模变量,导致收敛过程中滑移阶段的缺失,削减了SMC方法本身的抗干扰优势;现有的方法在内、外环控制器设计中未深入考虑位置跟踪与姿态跟踪不同的控制约束,缺乏适用性考量;此外,在双环控制策略中,内环控制增益较大,易受外界扰动影响,导致系统抖振。为抑制扰动的影响,目前SMC方法常采用扩展观测器<sup>[14]</sup>、自适应控制律<sup>[15]</sup>和构建摩擦力模型<sup>[16]</sup>的方法。但上述方法需获知扰动上界值,然而在复杂运行场景中,移动机器人所遇到的时变扰动上界值难以直接获取。

针对上述问题,本文提出基于双环自适应滑模的移动机器人鲁棒高精轨迹跟踪控制方法。主要创新点如下:①设计时变积分终端滑模面,消除传统滑模方法中的趋近阶段,加强收敛过程的可控性,提高系统的抗干扰能力;②通过参数的

自适应调整来改变滑模面,以适应位置跟踪与姿态跟踪不同的控制约束,实现姿态跟踪的快速精准以及位置跟踪的平稳高效;③在内环控制器中引入新型的自适应势垒函数趋近率,有效抑制系统因不确定性扰动产生的抖振。最后,通过测试分析验证本文所提方法的有效性和优越性。

## 1 运动学模型构建

本文研究对象为四轮全向移动机器人,由4个能够独立转向的轮毂组成,因此具有多种运动模式,下文将以阿克曼模式和双阿克曼模式为例,构建统一的运动学模型。

四轮全向机器人可向车辆中心简化为一个单车模型,移动机器人双阿克曼模型如图1所示。其中, $P$ 点为移动机器人的质心。

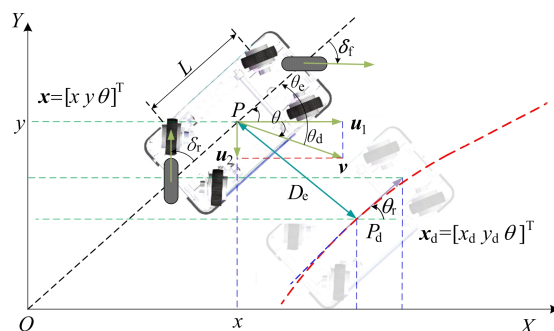


图1 移动机器人双阿克曼模型

设移动机器人的状态向量为 $x=[x \ y \ \theta]^T$ 。其中: $(x, y)$ 表示移动机器人的位置坐标; $\theta$ 表示移动机器人质心处的运动方向,沿X轴方向为初始方向,以逆时针方向为正。运动学模型<sup>[17]</sup>可以表示为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \frac{(j_1+1)v \tan \delta_f}{j_1 L + j_2 L} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中: $L$ 为移动机器人车身长度; $v$ 为移动机器人线速度大小; $\delta_f$ 为车轮转角; $j_1, j_2$ 为由用户定义的配置参数。当 $j_1=0, j_2=1$ 时,式(1)为阿克曼模型;当 $j_1=1, j_2=0$ 时,式(1)为双阿克曼模型。

令 $\omega = \frac{(j_1+1)v \tan \delta_f}{j_1 L + j_2 L}$ ,则式(1)可简化为:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (2)$$

## 2 双环轨迹跟踪控制

设定目标轨迹为 $(x_d, y_d)$ , $x_d, y_d$ 皆为时间 $t$

的函数,定义如下:

$$x_d(t) = f(t), \quad y_d(t) = g(x_d(t)) \quad (3)$$

其中,  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  为光滑函数,  $f(\cdot) \geq 0$  且一阶导数  $\dot{f}(\cdot) > 0$ 。

定义虚拟速度分量  $(u_1, u_2)$ , 其中  $u_1 = v \cos \theta$ ,  $u_2 = v \sin \theta$ , 则移动机器人实际线速度可由虚拟速度计算获得, 即  $v = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ 。设定移动机器人的期望方向角为  $\theta_d$ ,  $\theta_d = \arctan\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$ , 其中  $u_1 \neq 0$ , 最终可获得轨迹跟踪误差  $x_e$  为:

$$x_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_d \\ y - y_d \\ \theta - \theta_d \end{bmatrix} \quad (4)$$

由此可得轨迹跟踪系统为:

$$\dot{x}_e = \dot{x} - \dot{x}_d = u_1 - \dot{x}_d, \quad (5)$$

$$\dot{y}_e = \dot{y} - \dot{y}_d = u_2 - \dot{y}_d$$

$$\dot{\theta}_e = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d = \omega - \dot{\theta}_d + \dot{\varepsilon} \quad (6)$$

其中,  $\varepsilon$  为连续有界的外部扰动集,  $|\varepsilon| \leq M$  且  $M \in \mathbf{R}^+$ 。式(5)为外环位置跟踪系统; 式(6)为内环姿态跟踪系统。

双环控制框架如图 2 所示, 在该框架下, 可对移动机器人位置跟踪和姿态跟踪进行级联调控。调控过程为先控制内环的姿态跟踪误差  $\theta_e$  收敛, 再使外环位置跟踪误差  $(x_e, y_e)$  收敛。

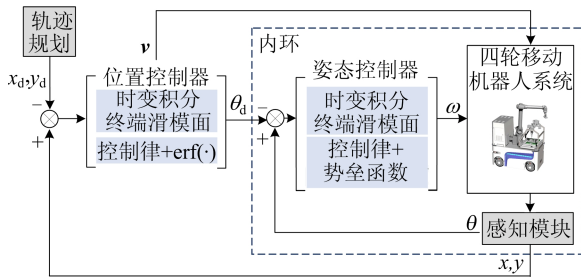


图 2 双环控制结构

基于双环控制策略的移动机器人轨迹跟踪, 需考虑内外环不同的控制约束:

1) 内环姿态跟踪对外界扰动敏感, 需关注跟踪过程的抗干扰性能。

2) 外环位置误差无上界, 需考虑当四轮移动机器人处于距离目标轨迹较远位置时收敛速度的平稳性。当接近目标轨迹后, 应保证位置误差的快速有限时间收敛。

3) 内环系统收敛速度应远快于外环, 外环输出应保证连续性<sup>[12]</sup>。

为满足上述约束, 本文考虑应用快速终端滑模方法, 并加以改进。传统快速终端滑模形式

如下:

$$s = \dot{e} + k |e|^\rho \operatorname{sgn}(e) \quad (7)$$

其中:  $e$  为系统误差;  $k$  为系数且  $k \in \mathbf{R}^+$ ;  $\rho = q/p$ ,  $p, q$  为正奇整数且  $p > q > 0$ 。

**引理 1**<sup>[18]</sup> 根据相位亏损概念, 式(7)中参数  $\rho$  的取值对系统在滑模面上动态特性的影响如下: ①  $0 < \rho < 1$  时, 系统在远离原点处收敛速度变化平稳, 在原点附近迅速收敛, 可保证系统有限时间收敛; ②  $\rho > 1$  时, 系统在远离原点处收敛速度快, 但在原点附近收敛慢, 为渐近收敛; ③  $\rho = 1$  时, 终端滑模面等同于线性化滑模面, 此时系统同样为渐近收敛。

由此可见, 系统的收敛速度与终端滑模面的参数  $\rho$  相关, 可对  $\rho$  进行自适应调控设计, 以协调内、外环收敛, 并满足内、外环不同的控制约束。

### 3 轨迹跟踪控制器的设计

#### 3.1 时变积分终端滑模面设计

构建滑模变量  $s$  如下:

$$s = e - e_0 + \int_0^t k \zeta \left| \frac{e(\tau)}{\zeta} \right|^{\rho(e)} \operatorname{sgn}(e(\tau)) d\tau \quad (8)$$

$$\rho(e) =$$

$$\begin{cases} \rho_\infty [1 - \exp(-\varepsilon(|e| + \zeta)^2)] + \\ \exp(-\varepsilon(|e| + \zeta)^2), & |e| > \zeta; \\ 1 - \lambda \exp\left(\varepsilon\left(1 - \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - e^2}\right)\right), & |e| < \zeta; \\ 1, & |e| = \zeta \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $e_0$  为系统初始误差;  $k, \varepsilon, \lambda, \rho_\infty$  为待定参数且均为正实数;  $\zeta$  为收敛特性发生变化的系统误差临界值;  $\rho(e)$  为连续时变参数, 有  $\lim_{e \rightarrow \infty} \rho(e) = \rho_\infty$ ,  $\lim_{e \rightarrow 0} \rho(e) = 1 - \lambda$ 。

令  $\rho_0 = 1 - \lambda$ , 可以通过选择合适的  $\rho_0$  和  $\rho_\infty$ , 设计系统分别在对应  $|e| < \zeta$  和  $|e| > \zeta$  区域内收敛特性。因此, 根据内环姿态跟踪和外环位置跟踪的需求, 对内环和外环滑模面进行如下设计。

1) 内环姿态跟踪控制的滑模变量为:

$$s_1 = \theta_e - \theta_{e0} + \int_0^t k_1 \zeta_1 \left| \frac{\theta_e(\tau)}{\zeta_1} \right|^{\rho_1(\theta_e)} \operatorname{sgn}(\theta_e(\tau)) d\tau \quad (10)$$

滑模面  $s_1 = 0$ , 此时选取  $\rho_\infty > 1, 0 < \rho_0 < 1$ 。当  $\theta_e > \zeta$  时,  $1 < \rho_1(\theta_e) < \rho_\infty$ ; 当  $0 < \theta_e < \zeta$  时,  $\rho_0 < \rho_1(\theta_e) < 1$ 。

$\rho_1(\theta_e)$  函数图像如图 3a 所示;  $\rho_1(\theta_e)$  关于  $\theta_e$  的一阶导函数图像如图 3b 所示, 可以看出  $\rho_1(\theta_e)$  一阶导函数为连续有界函数; 最终内环滑模面设

计如图 3c 所示。

从图 3 可以看出,当系统状态处于所设计的滑模面上时为全局快速收敛,收敛速度严格大于指数级收敛(即线性滑模  $\rho=1$ ),且可以保证有限时间收敛。

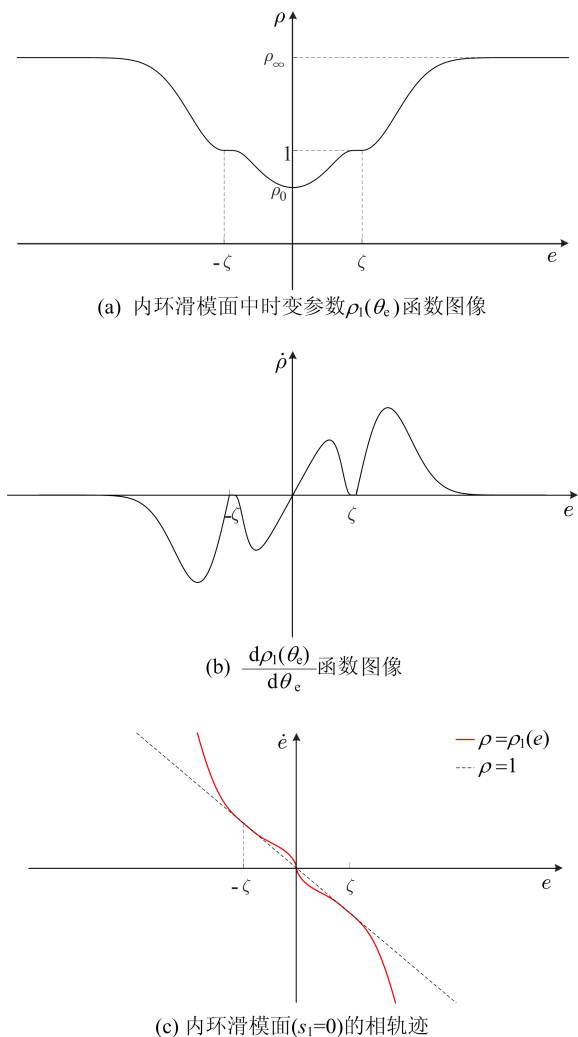


图 3 内环姿态跟踪系统收敛特性设计

2) 外环位置跟踪控制的滑模变量为:

$$\begin{cases} s_2 = x_e - x_{e0} + \int_0^t k_2 \zeta_2 \left| \frac{x_e(\tau)}{\zeta_2} \right|^{\rho_2(x_e)} \text{sgn}(x_e(\tau)) d\tau, \\ s_3 = y_e - y_{e0} + \int_0^t k_3 \zeta_3 \left| \frac{y_e(\tau)}{\zeta_3} \right|^{\rho_3(y_e)} \text{sgn}(y_e(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (11)$$

滑模面分别为  $s_2=0, s_3=0$ ,以 X 方向位置跟踪为例,选取  $0 < \rho_0 < 1, \rho_0 < \rho_\infty < 1$ 。当  $x_e > \zeta$  时,  $\rho_\infty < \rho_2(x_e) < 1$ ;当  $0 < x_e < \zeta$  时,  $\rho_0 < \rho_2(x_e) < 1$ 。

$\rho_2(x_e)$  函数图像如图 4a 所示; $\rho_2(x_e)$  关于  $x_e$  的一阶导函数图像如图 4b 所示,可以看出  $\rho_2(x_e)$  一阶导函数为连续有界函数;最终外环滑模面设

计如图 4c 所示。从图 4 可以看出:当系统状态处于所设计的滑模面上时,在距离目标轨迹较远的情况下(即  $x_e > \zeta$ ),系统收敛平稳且收敛速度严格小于指数级收敛;在接近目标轨迹后(即  $0 < x_e < \zeta$ ),系统快速收敛,收敛速度严格大于指数级收敛,且可以保证有限时间收敛。

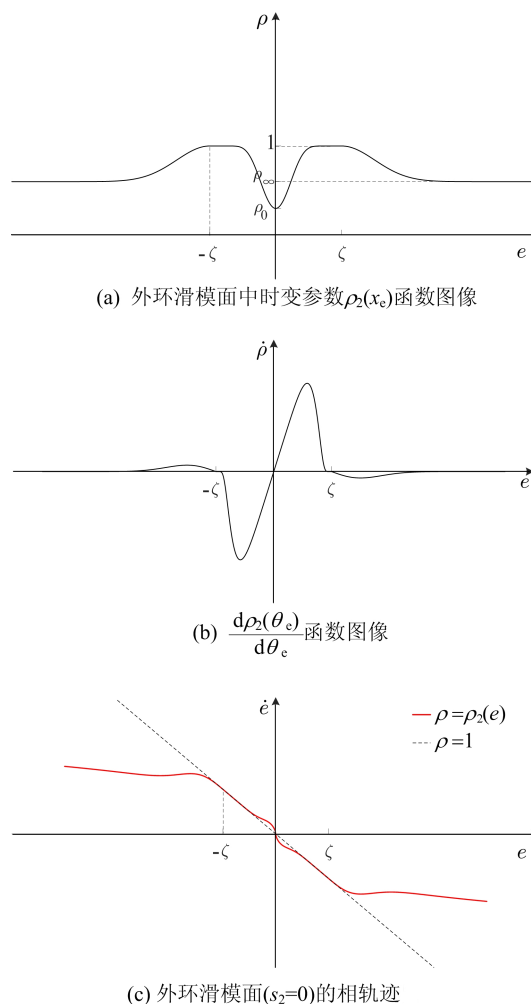


图 4 外环位置跟踪系统收敛特性设计

通过在滑模变量式(8)中引入初始误差,确保了  $s(0)=0$ ,即系统初始状态在滑模面上。通过后续的趋近率设计,保证系统状态不脱离滑模面,即可确保系统状态始终在滑模面上,从而实现通过调节滑模面来控制系统收敛特性,增强轨迹跟踪过程的可控性。此外,通过内、外环收敛速度相对于指数级收敛的快慢调控,以及对内、外环中的系统误差临界值  $\zeta$  的调节,可确保内环收敛速度远大于外环。

### 3.2 趋近率设计

在四轮移动机器人的双环控制策略中,内环需要考虑抵抗外界扰动,保持精准的姿态跟踪;而

外环需要保证输出信号的连续性。因此本文对内、外环趋近率分别采用不同的设计。

内环姿态控制器趋近率设计为:

$$\omega_{\text{reaching}} = -\varphi(s_1) \text{sgn}(s_1) - h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}} \text{sgn}(s_1) \quad (12)$$

其中:  $h_1$  为待定系数,  $h_1 \in \mathbf{R}^+$ ;  $p_1, q_1$  为正奇整数,  $0 < q_1 < p_1$ ;  $\varphi(s_1)$  为势垒函数。  $\varphi(s_1)$  设计为:

$$\varphi(s_1) = \frac{\alpha |s_1|}{\sigma - |s_1|} \quad (13)$$

其中:  $\alpha$  为待定系数,  $\alpha \in \mathbf{R}^+$ ;  $\sigma$  为自定义的一个微小区域,  $\sigma \in \mathbf{R}^+$ 。函数  $\varphi(s_1)$  图像如图 5 所示。

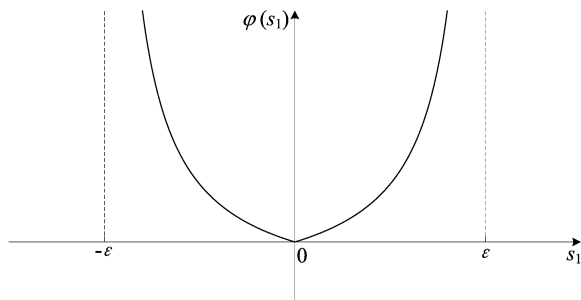


图 5 函数  $\varphi(s_1)$  图像

通过定义一个小的正实数  $\sigma$ , 得到一个小区域  $(-\sigma, \sigma)$ 。当内环系统受到外界扰动, 使系统状态脱离滑模面, 即  $|s_1|$  趋于  $\sigma$  时,  $\varphi(s_1)$  的值会随之增大, 从而获得合适的趋近率增益以抵抗外界扰动, 使得  $|s_1|$  趋于 0, 确保系统状态重新回到滑模面上。由此可见, 内环滑模变量  $|s_1|$  将会被限制在预先定义的小区域  $(-\sigma, \sigma)$  内, 从而确保系统状态始终保持在滑模面附近预定的小区域内。

外环位置控制器趋近率设计为:

$$\begin{cases} u_{\text{reaching}}^1 = -\eta \text{erf}(\gamma s_2) - h_2 |s_x|^{\frac{q_2}{p_2}} \text{sgn}(s_2), \\ u_{\text{reaching}}^2 = -\eta \text{erf}(\gamma s_3) - h_3 |s_y|^{\frac{q_3}{p_3}} \text{sgn}(s_3) \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $\eta, \gamma, h_2, h_3$  为待定系数且都大于 0;  $p_2, p_3$  和  $q_2, q_3$  为正奇整数,  $p_2 > q_2 > 0, p_3 > q_3 > 0$ ;  $\text{erf}(\cdot)$  为替代符号函数  $\text{sgn}(\cdot)$  的连续函数。

最终获得内、外环控制律为:

$$\begin{cases} \omega = \dot{\theta}_d - k_1 \zeta_1 \left| \frac{\theta_e}{\zeta_1} \right|^{\rho_1(\theta_e)} \text{sgn}(\theta_e) + \omega_{\text{reaching}} \quad (15) \\ \begin{cases} u_1 = \dot{x}_d - k_2 \zeta_2 \left| \frac{x_e}{\zeta_2} \right|^{\rho_2(x_e)} \text{sgn}(x_e) + u_{\text{reaching}}^1, \\ u_2 = \dot{y}_d - k_3 \zeta_3 \left| \frac{y_e}{\zeta_3} \right|^{\rho_2(y_e)} \text{sgn}(y_e) + u_{\text{reaching}}^2 \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

### 3.3 收敛性证明

**定理 1** 通过控制律式(15), 内环姿态跟踪系统式(6)可以实现有限时间收敛。

**证明** 因为系统初始状态处于滑模面上, 消除了趋近阶段, 所以只需证明滑移阶段的抗扰性和收敛性。

1) 证明滑移阶段抗扰性。对式(10)中内环姿态跟踪系统的滑模变量  $s_1$  进行求导, 并代入式(6)、式(12)、式(15)得:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{\theta}_e + k_1 \zeta_1 \left| \frac{\theta_e}{\zeta_1} \right|^{\rho_1(\theta_e)} \text{sgn}(\theta_e) = \omega - \dot{\theta}_d + \\ &\bar{\varepsilon} + k_1 \zeta_1 \left| \frac{\theta_e}{\zeta_1} \right|^{\rho_1(\theta_e)} \text{sgn}(\theta_e) = \omega_{\text{reaching}} + \bar{\varepsilon} = \\ &-\varphi(s_1) \text{sgn}(s_1) - h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}} \text{sgn}(s_1) + \bar{\varepsilon} \quad (17) \end{aligned}$$

设计 Lyapunov 函数  $V_1 = 0.5s_1^2 + 0.5\varphi^2$ , 并代入式(17)求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{s}_1 s_1 + \dot{\varphi} \varphi = \\ &s_1 [-\varphi \text{sgn}(s_1) - h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}} \text{sgn}(s_1) + \bar{\varepsilon}] + \\ &\varphi \frac{\alpha \sigma}{(\sigma - |s_1|)^2} \text{sgn}(s_1) \dot{s}_1 \leq -h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}+1} - \\ &\varphi |s_1| + |\bar{\varepsilon}| |s_1| + \varphi \frac{\alpha \sigma}{(\sigma - |s_1|)^2} \times \\ &[-h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}} - \varphi + \bar{\varepsilon} \text{sgn}(s_1)] \leq \\ &-h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}+1} - \varphi |s_1| + |\bar{\varepsilon}| |s_1| - \\ &\varphi \frac{\alpha \sigma h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}}}{(\sigma - |s_1|)^2} - \varphi \frac{\alpha \sigma}{(\sigma - |s_1|)^2} (\varphi - |\bar{\varepsilon}|) = \\ &-(h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}} + \varphi - |\bar{\varepsilon}|) |s_1| - \\ &\left[ \frac{\alpha \sigma h_1 |s_1|^{\frac{q_1}{p_1}}}{(\sigma - |s_1|)^2} + \frac{\alpha \sigma}{(\sigma - |s_1|)^2} (\varphi - |\bar{\varepsilon}|) \right] \bar{\eta} \quad (18) \end{aligned}$$

当  $s_1$  受扰动集  $\bar{\varepsilon}$  影响进入区间  $\left[ \frac{\sigma |\bar{\varepsilon}|}{|\bar{\varepsilon}| + \alpha}, \sigma \right)$  后, 根据式(13), 此时  $\varphi \geq |\bar{\varepsilon}|$ , 进而可得  $\dot{V}_1 \leq 0$ ,  $s_1$  将向 0 收敛, 因此, 在存在扰动的情况下,  $s_1$  也可始终被约束在区域  $(-\sigma, \sigma)$  内。

2) 证明系统收敛性。当系统状态处于滑模面上时,  $s_1 = \dot{s}_1 = 0$ , 由式(10)得:

$$\dot{\theta}_e + k_1 \zeta_1 \left| \frac{\theta_e}{\zeta_1} \right|^{\rho_1(\theta_e)} \text{sgn}(\theta_e) = 0 \quad (19)$$

设计 Lyapunov 函数  $V_2 = 0.5\theta_e^2$ , 并代入式(19)求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{\theta}_e \theta_e = -k_1 \zeta_1 \left| \frac{\theta_e}{\zeta_1} \right|^{\rho_1(\theta_e)} \text{sgn}(\theta_e) \theta_e = \\ &-k_1 \zeta_1^{1-\rho_1(\theta_e)} |\theta_e|^{\rho_1(\theta_e)+1} \leq 0 \quad (20) \\ \dot{V}_2 &\leq 0, \text{因此 } \theta_e \text{ 收敛且趋于 } 0. \text{ 由于当 } |\theta_e| \in \end{aligned}$$

$(0, \zeta)$  时  $\rho_1(\theta_c) < 1$ , 根据引理 1,  $\theta_c$  为有限时间收敛。定理 1 得证。

**定理 2** 通过控制律式(16), 外环位置跟踪系统式(5)可实现有限时间收敛, 最终实现全环路有限时间收敛。

**证明** 以  $X$  方向跟踪为例。由于内环姿态跟踪系统为有限时间收敛, 因此可定义内环收敛时间为  $t_\theta$ 。因为在时间  $0 \sim t_\theta$  内, 内环系统未收敛, 所以外环系统状态在  $0 \sim t_\theta$  内存在脱离滑模面的可能。根据式(16)可知, 外环控制增益连续, 因此  $s_2(t_\theta)$  为有限大小的实数。考虑  $0 \sim t_\theta$  内存在脱离滑模面的情况, 证明过程如下:

1) 证明滑模面的可达性。对式(11)中外环位置  $X$  方向跟踪系统的滑模变量  $s_2$  进行求导, 并分别代入式(5)、式(14)、式(16), 得:

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= \dot{x}_e + k_2 \zeta_2 \left| \frac{x_e}{\zeta_2} \right|^{\rho_2(x_e)} \text{sgn}(x_e) = \\ & u_1 - \dot{x}_d + k_2 \zeta_2 \left| \frac{x_e}{\zeta_2} \right|^{\rho_2(x_e)} \text{sgn}(x_e) = \\ & \dot{x}_d - k_2 \zeta_2 \left| \frac{x_e}{\zeta_2} \right|^{\rho_2(x_e)} \text{sgn}(x_e) + u_{\text{reaching}} - \\ & \dot{x}_d + k_2 \zeta_2 \left| \frac{x_e}{\zeta_2} \right|^{\rho_2(x_e)} \text{sgn}(x_e) = \\ & -\eta \text{erf}(\gamma s_2) - h_2 |s_x|^{\frac{q_2}{p_2}} \text{sgn}(s_2) \quad (21) \end{aligned}$$

设计 Lyapunov 函数  $V_3 = 0.5s_2^2$ , 并代入式(21)求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= s_2 \dot{s}_2 = -\eta \text{erf}(\gamma s_2) - h_2 |s_x|^{\frac{q_2}{p_2}} \times \\ & \text{sgn}(s_2) s_2 \leq -\eta |s_2| - h_2 |s_2|^{\frac{q_2}{p_2}+1} \leq 0 \quad (22) \end{aligned}$$

$\dot{V}_3 \leq 0$ , 因此  $s_2$  收敛且趋于 0, 即系统状态最终会回到滑模面上。

2) 证明任意  $s_2(t_\theta)$  都具可达性。定义达到滑模面的时间为  $t_r$ , 由式(21)计算得:

$$t_r \leq \frac{p_2}{h_2(p_2 - q_2)} |s_2(t_\theta)|^{\frac{p_2 - q_2}{p_2}} \quad (23)$$

因此, 任意  $s_2(t_\theta)$  都将在时间  $t_r$  后回到滑模面。

3) 证明系统收敛性。当系统状态处于滑模面上时,  $s_2 = \dot{s}_2 = 0$ , 由式(11)得:

$$\dot{x}_e + k_2 \zeta_2 \left| \frac{x_e}{\zeta_2} \right|^{\rho_2(x_e)} = \text{sgn}(x_e) = 0 \quad (24)$$

设计 Lyapunov 函数  $V_4 = 0.5x_e^2$ , 并代入式(24)求导得:

$$\dot{V}_4 = \dot{x}_e x_e = -k_2 \zeta_2 \left| \frac{x_e}{\zeta_2} \right|^{\rho_2(x_e)} \text{sgn}(x_e) x_e =$$

$$-k_2 \zeta_2^{1-\rho_2(x_e)} |x_e|^{\rho_2(x_e)+1} \leq 0 \quad (25)$$

因为  $\dot{V}_4 \leq 0$ , 所以  $x_e$  收敛且趋于 0。当  $|x_e| \in (0, \zeta)$  时  $\rho_2(x_e) < 1$ , 根据引理 1,  $x_e$  为有限时间收敛。 $y_e$  同理可证。因此定理 2 得证。

## 4 测试结果分析

### 4.1 内外环收敛性结果分析

以四轮移动机器人运动学模型为控制对象, 设定目标轨迹为  $x_d = f(t) = 0.5t$ ,  $y_d = g(x_d)$ , 其中  $g(\cdot)$  为满足需求的任意光滑拟合曲线。滑模面参数选择为:  $k_1 = 3, k_2 = k_3 = 1; \epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.1; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.4; \rho_{\infty}^1 = 1.5, \rho_{\infty}^2 = \rho_{\infty}^3 = 0.6; \zeta_1 = \frac{\pi}{36} \text{ rad}, \zeta_2 = \zeta_3 = 1.6 \text{ m}; h_i = 1, p_i = 33, q_i = 17$ , 其中  $i = 1, 2, 3; \alpha = 1.4; \eta = 0.1; \sigma = 0.001 \text{ m}; \gamma = 10$ 。

在软件 MATLAB/Simulink 上进行半实物测试。本文测试环境如下: CPU 为 AMD Ryzen 5 5600H 处理器 3.30 GHz; RAM 为 16 GiB。

采用本文改进双环 SMC 方法的情况下, 四轮移动机器人对目标轨迹的跟踪结果如图 6 所示; 对应的位置误差和姿态误差的收敛过程如图 7 所示。

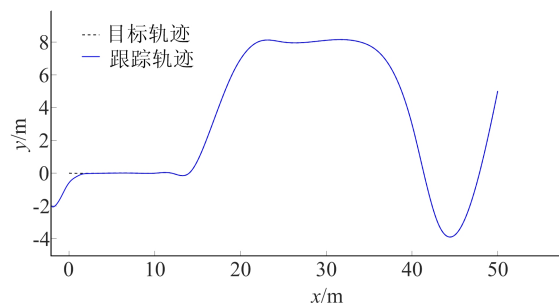


图 6 本文方法轨迹跟踪结果

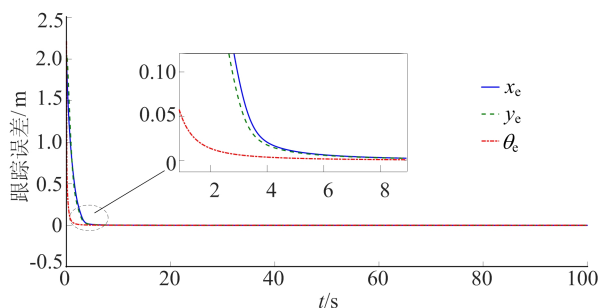


图 7  $x, y, \theta$  跟踪误差收敛

从图 7、图 8 可以看出, 本文所提方法可以快速稳定地跟踪目标轨迹, 并且内环姿态跟踪系统的收敛速度远大于外环。

### 4.2 与其他方法对比结果分析

为进一步说明本文改进双环 SMC 方法的优越性,选择现有的双环等速 SMC 方法和双环终端 SMC 方法进行对比分析,并在 50~70 s 间加入外界扰动  $\varepsilon=0.5\sin(2\pi t)$ 。对比结果如图 8~图 11 所示。

图 8 所示为 3 种控制方法下的跟踪效果;图 9 所示为对应的位置误差收敛过程。可以看出,相较于现有的双环控制方法,通过对误差收敛过程调控,本文方法可以更高效地回到目标轨迹,且在转角处和有外界扰动时跟踪精度更高。

图 10 所示为 3 种方法下内环姿态跟踪系统误差收敛过程;图 11 所示为 3 种方法下四轮移动机器人对目标轨迹上切线方向的跟踪。

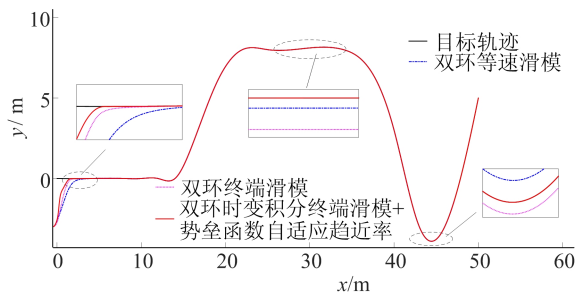


图 8 3 种方法轨迹跟踪结果

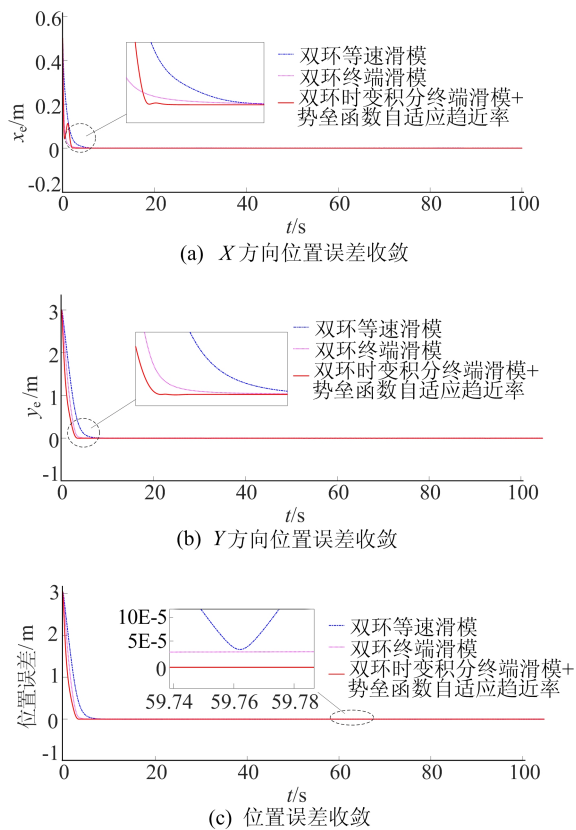


图 9 外环误差收敛

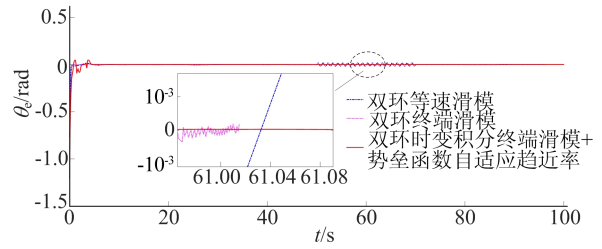


图 10 姿态角误差收敛

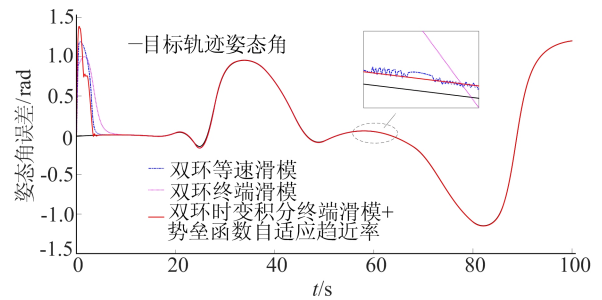


图 11 对目标轨迹上角度的跟踪

由图 10、图 11 可知,在存在外界扰动的情况下,本文方法可以显著抑制系统抖振,从而有更高的跟踪精度。

分别采用绝对误差积分 (IAE) 准则,平方误差积分 (ISE) 准则和标准差 (STD) 对 3 种控制方法下的位置跟踪性能进行评估,结果见表 1 所列。从表 1 可以看出,在所有评价准则中,本文方法都有最优的性能。

同样采用 3 种评价准则对姿态跟踪效果进行评估,结果见表 2 所列。由表 2 可知,在所有评价准则中,本文方法跟踪性能仍为最优。

表 1 位置跟踪误差收敛性评价

评价 准则	双环等 速滑模	双环终 端滑模	双环时变积分终端滑模+ 势垒函数自适应趋近率
IAE	5.758 1	3.943 2	2.795 3
ISE	10.821 1	7.496 4	4.759 7
STD	0.323 9	0.271 0	0.216 4

表 2 姿态跟踪误差收敛性评价

准则	双环等 速滑模	双环终 端滑模	双环时变积分终端滑模+ 势垒函数自适应趋近率
IAE	4.131 1	3.332 7	2.928 8
ISE	2.951 4	2.997 8	2.639 5
STD	0.167 8	0.170 4	0.160 2

## 5 结 论

本文提出双环自适应滑模的控制方法,用以

解决传统双环控制策略中内外环协调性差、抗扰性弱的问题,以提升移动机器人轨迹跟踪精度。首先,设计时变积分终端滑模控制器,提高轨迹跟踪过程的可控性和抗干扰能力;其次,通过内、外环控制器不同的滑模面参数设定,同时满足外环位置跟踪系统的连续平稳有限时间收敛的需求,以及内环姿态跟踪系统速度远大于外环的全局快速收敛需求,以确保全环路高效稳定收敛;再次,在内环控制器中引入势垒函数,抑制系统因不确定性扰动产生的抖振;最后,进行测试验证。结果表明,与现有的双环控制方法相比,本文所提的改进双环 SMC 方法具有更优的跟踪效率、更高的跟踪精度和更强的抗干扰能力。

### [参 考 文 献]

- [1] JIANG L, WANG S, XIE Y, et al. Decoupled fractional super-twisting stabilization of interconnected mobile robot under harsh terrain conditions[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(8): 8178-8189.
- [2] 李高铭, 聂卓赞, 李兆洋, 等. 非平衡负载下轮式移动机器人的抗扰 PID 控制[J]. *控制理论与应用*, 2021, 38(3): 398-406.
- [3] BINH N T, TUNG N A, NAM D P, et al. An adaptive backstepping trajectory tracking control of a tractor trailer wheeled mobile robot[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2019, 17(2): 465-473.
- [4] 郭明阳, 刘爽. 基于模型预测控制的移动机器人户外导航方法[J]. *华东理工大学学报(自然科学版)*, 2022, 48(2): 273-280.
- [5] DING T, ZHANG Y, MA G, et al. Trajectory tracking of redundantly actuated mobile robot by MPC velocity control under steering strategy constraint[J]. *Mechatronics*, 2022, 84: 102779.
- [6] ALSHORMAN A M, ALSHORMAN O, IRFAN M, et al. Fuzzy-based fault-tolerant control for omnidirectional mobile robot[J]. *Machines*, 2020, 8(3): 55.
- [7] 马东, 董力元, 王立玲, 等. 移动机器人 RBF 神经网络自适应 PD 跟踪控制[J]. *控制工程*, 2020, 27(12): 2092-2098.
- [8] 郭一军, 徐建明. 考虑执行器饱和和补偿的移动机器人自适应积分滑模控制[J]. *重庆邮电大学学报(自然科学版)*, 2018, 30(6): 855-860.
- [9] XIE Y, ZHANG X, MENG W, et al. Coupled fractional-order sliding mode control and obstacle avoidance of a four-wheeled steerable mobile robot[J]. *ISA Trans*, 2021, 108: 282-294.
- [10] REN C, LI X, YANG X, et al. Extended state observer-based sliding mode control of an omnidirectional mobile robot with friction compensation[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 66(12): 9480-9489.
- [11] 江道根, 吕龙进, 潘世华, 等. 移动机器人轨迹跟踪快速终端滑模自抗扰控制[J]. *控制工程*, 2022, 29(1): 91-100.
- [12] AILON A, ZOHAR I. Controllers for trajectory tracking and string-like formation in wheeled mobile robots with bounded inputs[C]//*Proceedings of the Melecon 2010 15th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference*. [S. l.]: IEEE, 2010: 1563-1568.
- [13] DIAN S, HAN J, GUO R, et al. Double closed-loop general type-2 fuzzy sliding mode control for trajectory tracking of wheeled mobile robots[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2019, 21(7): 2032-2042.
- [14] 许坤, 陈谋. 基于干扰观测器的移动机器人轨迹跟踪控制[J]. *应用科学学报*, 2016, 34(2): 177-89.
- [15] TIJJANI A S, CHEMORI A, CREUZE V. Robust adaptive tracking control of underwater vehicles: design, stability analysis, and experiments[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2021, 26(2): 897-907.
- [16] YUE M, WANG L, MA T. Neural network based terminal sliding mode control for WMRs affected by an augmented ground friction with slippage effect[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2017, 4(3): 498-506.
- [17] XIE Y, ZHANG X, MENG W, et al. Coupled sliding mode control of an omnidirectional mobile robot with variable modes[C]//*Proceedings of the 2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. [S. l.]: IEEE, 2010: 1792-1797.
- [18] YAO M, XIAO X, TIAN Y, et al. A fast terminal sliding mode control scheme with time-varying sliding mode surfaces[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358(10): 5386-5407.

(责任编辑 胡亚敏)