

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2024.01.021

自适应 Newton-Thiele 有理插值及应用

李 麟, 檀结庆, 邢 燕

(合肥工业大学 数学学院, 安徽 合肥 230601)

摘 要:二元连分式插值是二元有理插值的重要组成部分;文章在前人研究的基础上,对 Newton-Thiele 有理插值构造过程进行改进。针对 Newton-Thiele 有理插值在插值过程出现逆差商不存在的情况,传统的解决方法是将相应的 Thiele 型插值连分式转换为 Newton 插值多项式,然而该处理方法会导致计算复杂度的增加。借鉴相关文献在一元有理插值上的选点方法,文章给出一种带终止条件的自适应贪婪选点算法,即在给定插值点中根据自适应条件筛选出局部点对函数进行构造,以提高 Newton-Thiele 有理插值函数构造过程的稳定性,提升运算效率。对非线性函数的插值结果表明:该算法的插值效果较好、误差较小;同时将该算法应用到图像修复中,并与其他相关算法的修复效果进行对比,进一步验证了该算法的有效性。

关键词:连分式;逆差商存在性;Newton-Thiele 有理插值;自适应贪婪算法;图像修复

中图分类号:O242.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2024)01-0137-08

Adaptive Newton-Thiele's rational interpolation and its application

LI Lin, TAN Jieqing, XING Yan

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230601, China)

Abstract: Binary continued fraction interpolation plays an important role in the field of binary rational interpolation functions. Based on previous studies, this paper improves Newton-Thiele's rational interpolation in practical application. In the construction of Newton-Thiele's rational interpolation, there are situations where the inverse differences do not exist. In traditional methods, when the inverse differences do not exist, the corresponding Thiele-type continued fraction is replaced by a Newton-type polynomial to solve this problem. However, this processing method leads to an increase in computational complexity. Drawing inspiration from the point selection methods in univariate rational interpolation in relevant literature, the paper explores a Newton-Thiele's rational interpolation algorithm based on adaptive greedy point selection strategy with termination conditions. By selecting partial points among the given points based on adaptive conditions, this algorithm can improve the stability of the construction process of Newton-Thiele's rational interpolation function and improve the efficiency of computation. Through nonlinear function interpolation, it is proved that the algorithm can produce favorable interpolation effect and maintain the error at a low level. Meanwhile, in the application of image inpainting, the algorithm is compared with other related algorithms to further verify the effectiveness of the algorithm.

Key words: continued fractions; existence of inverse difference; Newton-Thiele's rational interpolation; adaptive greedy algorithm; image inpainting

作为一种经典的数学表达式,连分式为数学 物理中特殊函数的表示和推广提供了重要手

收稿日期:2023-03-01;修回日期:2023-04-07

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62172135)

作者简介:李 麟(1996—),女,安徽望江人,合肥工业大学硕士生;

檀结庆(1962—),男,安徽望江人,博士,合肥工业大学教授,博士生导师,通信作者,E-mail:jieqingtan@126.com;

邢 燕(1977—),女,安徽合肥人,博士,合肥工业大学副教授,硕士生导师。

段^[1-2]。文献[3-5]研究了连分式函数插值问题;文献[6]系统阐述了连分式相关问题,以及在计算机辅助设计和制造中的应用;文献[7]对连分式相关计算问题进行了阐述;文献[8]将分支的思想应用到连分式上,开创了连分式理论和方法研究的新时代;在此基础上,文献[9]提出了函数有理逼近以及分支连分式插值;文献[10]将一元 Thiele 型连分式插值推广到多元 Thiele 型连分式插值,并给出二元分支连分式函数的计算方法。

文献[11]证明了二元 Newton 型多项式插值和二元 Thiele 型连分式插值可以在矩形网格上组合生成 4 种二元连分式有理插值;文献[12]具体研究了 Newton-Thiele 有理插值,并引入混合差商,给出了一种递归算法进行插值。关于连分式的二元有理插值,可以参阅文献[13]及其参考文献。文献[14]介绍了几何连分式的相关性质;文献[15]讨论了 Thiele 型连分式插值以及 Thiele 型连分式的正则分子和正则分母的零问题,证明了分子多项式和分母多项式没有公零,同时证明了 Thiele 型连分式的收敛性是通过分解 Thiele 型连分式中的函数而得到,确定了收敛于 Thiele 型连分式的分母多项式的零区域。

图像插值被广泛应用于数字图像处理,如图像超分辨、图像修复等;在这个过程中,构造一个有效的插值函数十分重要。文献[16]应用 Newton-Thiele 有理插值进行图像压缩与重建,同时给出基于 Newton-Thiele 有理插值连分式的图像修复算法^[17-18],与其他传统方法相比,取得了较好的修复效果;文献[18-20]分别使用二元连分式插值进行图像修复、图像处理以及图像超分辨等;文献[16]探讨了连分式插值会出现不稳定的情况。基于文献[21]提出的自适应 Thiele 型连分式插值构造方法,本文提出一种自适应 Newton-Thiele 有理插值算法,该算法在构造插值函数时可以选取较少的点,但依旧产生很好的插值效果,尤其是在对复合函数进行有理插值时能够显示出良好的稳定性。本文算法在图像修复方面的应用进一步验证了该算法的有效性。

1 连分式有理插值的计算

1.1 Thiele 型连分式的定义

设 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ 为一个实数或者复数的集合, x_0, x_1, \dots, x_m 不必互异,函数 $f(x)$ 定义于 $D \supset X$,则在 X 中与 $f(x)$ 一致的 Thiele 型连分式可表示为:

$$T_m(x) = b_0 + \frac{x-x_0}{b_1} + \frac{x-x_1}{b_2} + \dots + \frac{x-x_{m-1}}{b_m}, \quad (1)$$

其中, $b_i = \phi[x_0, x_1, \dots, x_i]$ ($i=0, 1, \dots, m$) 是函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_1, \dots, x_m 的第 i 个逆差商,计算方法如下:

$$\begin{aligned} \phi[x_i] &= f(x_i), \quad i=0, 1, 2, \dots, m, \\ \phi[x_p, x_q] &= \frac{x_q - x_p}{\phi[x_q] - \phi[x_p]}, \\ &\vdots \\ \phi[x_i, \dots, x_j, x_k, x_l] &= \frac{x_l - x_k}{\phi[x_i, \dots, x_j, x_l] - \phi[x_i, \dots, x_j, x_k]} \end{aligned} \quad (2)$$

不难证明 $T_m(x)$ 是一个有理函数,它的分子和分母分别是次数为 $[(m+1)/2]$ 和 $[m/2]$ 的多项式(此处 $[\mu]$ 表示不超过 μ 的最大整数),满足^[13] $T_m(x_i) = f(x_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, m$ 。

1.2 Newton-Thiele 有理插值的定义

给定实数或复数集合 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ 和 $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ 以及 X 和 Y 的张量积集合

$$\prod_{x,y}^{m,n} = X \times Y = \{(x_i, y_j) \mid i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n\} \quad (3)$$

函数 $f(x, y)$ 定义在一个包含 $\prod_{x,y}^{m,n}$ 的集合中, Newton-Thiele 有理插值函数是指如下形式的有理函数^[12]:

$$R_{m,n}^{NT}(x, y) = A_0^{(n)}(y) + (x-x_0)A_1^{(n)}(y) + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{m-1})A_m^{(n)}(y) \quad (4)$$

对 $i=0, 1, 2, \dots, m$,

$$A_i^{(n)}(y) = a_{i0} + \frac{y-y_0}{a_{i1}} + \frac{y-y_1}{a_{i2}} + \dots + \frac{y-y_{n-1}}{a_{in}} \quad (5)$$

其中, $a_{ij} = \phi[x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]$ 是混合差商,计算公式如下:

$$\begin{aligned} \phi[x_i; y_j] &= f(x_i, y_j), \quad \forall (x_i, y_j) \in \prod_{x,y}^{m,n}, \\ \phi[x_i, x_j; y_k] &= \frac{\phi[x_j; y_k] - \phi[x_i; y_k]}{x_j - x_i}, \\ \phi[x_p, \dots, x_q, x_i, x_j; y_k] &= \frac{\phi[x_p, \dots, x_q, x_j; y_k] - \phi[x_p, \dots, x_q, x_i; y_k]}{x_j - x_i}, \\ \phi[x_p, \dots, x_q; y_k, y_l] &= \frac{y_l - y_k}{\phi[x_p, \dots, x_q; y_l] - \phi[x_p, \dots, x_q; y_k]}, \end{aligned}$$

$$\phi[x_p, \dots, x_q; y_r, \dots, y_s, y_k, y_l] = (y_l - y_k) / (\phi[x_p, \dots, x_q; y_r, \dots, y_s, y_l] - \phi[x_p, \dots, x_q; y_r, \dots, y_s, y_k]) \quad (6)$$

可以证明由式(4)和式(5)确定的 $R_{m,n}^{NT}(x, y)$ 满足

$$R_{m,n}^{NT}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

2 自适应 Newton-Thiele 有理插值

2.1 逆差商存在性

在 Newton-Thiele 有理插值函数的构造中, 当 $\phi[x_p, \dots, x_q; y_r, \dots, y_s, y_l] = \phi[x_p, \dots, x_q; y_r, \dots, y_s, y_k]$ 时, 逆差商 $\phi[x_p, \dots, x_q; y_r, \dots, y_s, y_k, y_l]$ 不存在。逆差商不存在, Newton-Thiele 有理插值函数的构造难以进行。当出现此类情况时, 文献[19]考虑将相应的 Thiele 型插值连分式转化为 Newton 插值多项式。本文基于文献[21]构造一元 Thiele 型插值连分式的方法, 提出一种二元 Newton-Thiele 有理插值的自适应贪婪选点算法。此算法在待插值的二维坐标矩阵中根据自适应条件选择部分行和列进行插值, 每个待插值点选择的依据是避免逆差商不存在, 最终得到基于部分点的 Newton-Thiele 有理插值函数。

定理 1 若点集 $\{x_i | i=0, 1, \dots, m\}$ 中的点的排列顺序可使得连分式(1)的每 2 个连续收敛点都不相同, 则 $\phi[x_0, \dots, x_i] \neq \infty$ 。

定理 1 的证明见文献[21]。

本文推广了文献[21]中 Thiele 型连分式插值的自适应选点策略; 由式(6)可知, Newton-Thiele 有理插值函数构造过程中, 逆差商的存在与否只与纵轴方向坐标的选择顺序相关, 即对待插值矩阵中固定的某行、某列的选择不影响逆差商存在与否。在构造 Newton-Thiele 有理插值函数时, 基于待插值的二维坐标矩阵, 考虑先选择该矩阵中横轴方向坐标, 以简化 Newton-Thiele 有理插值函数的构造。固定所选横轴坐标后, 继续进行待插值点矩阵纵轴坐标的选择。根据定理 1, 当迭代选择纵轴方向坐标时, 保证 $A_m^{(j-1)}(y)$ 与 $A_m^{(j)}(y)$ 不同, 就可以确保逆差商 $\phi[x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]$ 存在, 从而确保插值函数的成功构造。

2.2 贪婪选点策略

给定 2 个有限的点序列 $\{x_i | i=0, 1, \dots, m\}$ 、 $\{y_j | j=0, 1, \dots, n\}$ 和相应的关于函数 $f(x, y)$ 的 $(n+1) \times (m+1)$ 矩阵 \mathbf{M} 。根据特定选点规则, 在给定的函数值矩阵中选择部分行和列, 获得 1 个

只包含所选行、列的子矩阵构造插值函数: 首先确定子矩阵的第一行, 同时在此行中选择待插值的列; 确定好所有待插值列(待插值横轴坐标)及第一行(第一个纵轴坐标 y_0)之后, 逐步确定接下来的待插值纵坐标。在纵轴方向的第 j 次迭代中, 对于给定函数 $R_{p,j}^{NT}(x, y)$ 和行 y_0, y_1, \dots, y_j , 对余下的行 $y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_n$ 重新排序, 确保每选择一行, 所选行、列构成的矩阵满足 $|A_m^{(j-1)}(y) - A_m^{(j)}(y)| \neq 0$, 同时为了插值效果更好, 本文对选定的行再进行判断, 选择所选行与剩下行中满足 $|R_{p,j}^{NT}(x, y) - f(x, y)|$ 最大的行; 以此类推, 得到 $R_{p,j+1}^{NT}(x, y)$ 。

自适应贪婪选点过程如图 1 所示。图 1 的右上子图表明, 选取给定函数值矩阵 \mathbf{M} 中均值最小的行作为子矩阵的第一行, 同时选取该行中绝对值最小的点作为第一个点 (x_0, y_0) 。图 1 的左上子图表明, 使用贪婪选择方法继续选择列, 即依次选择 x_0, x_1, x_2, \dots ; 当误差减小到设定阈值时, 终止横轴坐标的选择; 子矩阵的横坐标确定后, 即完成了子矩阵列的选择; 之后继续选择行。行的选择方式稍显复杂, 如图 1 的右下子图所示, 其中黑点为原函数值矩阵中由已确定的行和列组成的子矩阵的分布。

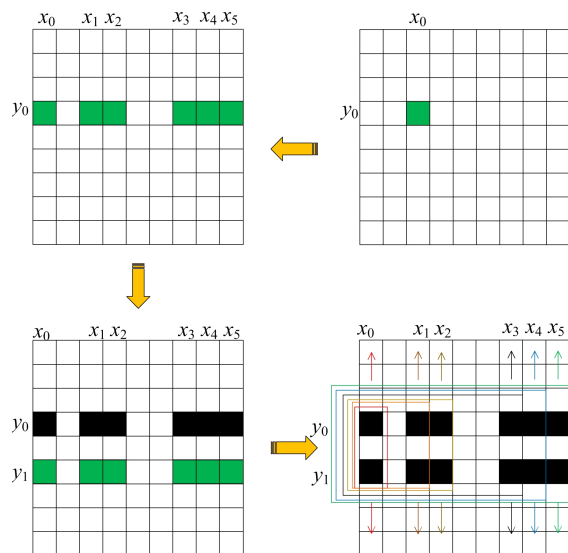


图 1 自适应贪婪选点过程

为了确保逆差商的存在, 本文采用贪婪选点策略确定下一行。假设在第 $(q+1)$ 轮迭代中, $(q+1)$ 行被选中, x_0, x_1, \dots, x_p 为选定的横坐标, y_0, y_1, \dots, y_q 为选定的纵坐标。即对于所选横坐标中的 $x_j (0 \leq j \leq p)$ 列, 对应的函数 $A_j^{(q)}(y)$ 可以由 x_0, x_1, \dots, x_j 行和 y_0, y_1, \dots, y_q 列进行构造;

对 \mathbf{M} 的剩余行, 继续计算 $A_j^{(q)}(y)$ 在 x_j 列中的点的值, $A_j^{(q)}(y)$ 的值与剩余行 $A_j^{(s)}(y)$ 的值之间的差值作为差值矩阵 \mathbf{D} 中相应列的值; 以此类推, 直到得到该轮迭代的差值矩阵 \mathbf{D} 。若差值矩阵 \mathbf{D} 中该行的值满足相应的逆差商存在条件, 则选中该行; 否则继续判断其余行是否满足条件, 直至不满足条件, 迭代终止。在所选中行中, 考虑计算所选行各点上对应插值函数与原函数的差值确定下一行, 选择所选行中差值的最小值, 再比较最小值, 最小值最大的行即为待选行; 以此类推, 最终确定原函数矩阵 \mathbf{M} 中所选的行和列构建插值函数。本文的实例表明, 该算法选择的函数的待选点尽可能少, 而误差仍然可以控制在一定的水平内。

文献 [21-23] 中, AAA (adaptive Antoulas-Anderson) 算法采用了类似的贪婪选择策略, 尽管 AAA 算法是出于数值考虑而非逆差商的存在, 但是这种策略被证明是有效的。在传统二元连分式计算中, 逐步计算逆差商和收敛点存在数值不稳定性, 甚至会导致精度的损失, 实例验证了本文所提自适应贪婪策略在 Newton-Thiele 有理插值构造过程中是稳定的, 具体算法如下:

算法 1 自适应 Newton-Thiele 有理插值算法。

输入: 2 个有限点序列 $\{x_i | i=0, 1, \dots, m\}$ 、 $\{y_j | j=0, 1, \dots, n\}$ 及相应的 $(n+1) \times (m+1)$ 函数值矩阵 \mathbf{M} , 设定阈值 τ_1, τ_2 。

输出: 筛选出用于构造插值的子矩阵所需的点。

1) 通过 $y_0 = \operatorname{argmin}_r |\overline{\mathbf{M}_{r,c}}|$ 选择子矩阵的第一行 y_0 , 其中 $|\overline{\mathbf{M}_{r,c}}|$ 为矩阵 \mathbf{M} 第 r 行相应值绝对值的均值。

2) 通过 $(x_0, y_0) = \operatorname{argmin}_{y_0,c} |\overline{\mathbf{M}_{y_0,c}}|$ 选出子矩阵的第一个点 (x_0, y_0) 。

3) 对 $i=0, 1, \dots, m$, 获取选点 $(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_i, y_0)$ 。

4) 计算 Newton-Thiele 有理插值 A_i , 该插值由 $(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_i, y_0)$ 及这 $i+1$ 个点在 \mathbf{M} 中相应的函数值构造。

5) 计算剩余点 $(x_{i+1}, y_0), (x_{i+2}, y_0), \dots, (x_m, y_0)$ 关于 A_i 及 \mathbf{M} 相应函数值 $M_{y_0, x_{i+1}}, M_{y_0, x_{i+2}}, \dots, M_{y_0, x_m}$ 之间的差值, 通过 $(a, y_0) = \operatorname{argmax}_{y_0, i+1 \leq j \leq m} |A_i - M_{y_0, x_j}|$ 确定具有最大差值的点作为下一个待选点。

6) 若满足 $\max_{y_0, i+1 \leq j \leq m} |A_i - M_{y_0, x_j}| < \tau_1 \times$

$\max_{y_0, i+1 \leq j \leq m} |M_{y_0, x_j}|$, 则终止迭代, 获得选点 $(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_p, y_0)$ 。

7) 否则, 将 (a, y_0) 添加到已选点列中构成新的已选点序列 $(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_{i+1}, y_0)$ 。

8) 对 $j=0, 1, \dots, n$, 得到已选行的信息, 即 y_0, y_1, \dots, y_j , 因此得到已选点:

$$\begin{aligned} & (x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_p, y_0); \\ & (x_0, y_1), (x_1, y_1), \dots, (x_p, y_1); \\ & \vdots \\ & (x_0, y_j), (x_1, y_j), \dots, (x_p, y_j). \end{aligned}$$

9) 对 $i=0, 1, \dots, m$, 计算 Newton-Thiele 有理插值 $A_{i,j}$, 插值构造基于 $(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_i, y_0); \dots; (x_0, y_j), (x_1, y_j), \dots, (x_i, y_j)$ 及这些点在 \mathbf{M} 中相应的函数值。

10) 计算原函数对应的矩阵中选定的前 i 列剩余行的点关于 $A_{i,j}$ 及相应的函数 $M_{y_{j+1}, x_0}, M_{y_{j+1}, x_1}, \dots, M_{y_{j+1}, x_i}; \dots; M_{y_n, x_0}, M_{y_n, x_1}, \dots, M_{y_n, x_i}$ 之间的差值。

11) 得差值矩阵 \mathbf{D} , 通过 $b = \operatorname{argmax}_i (\min_j D_{i,j})$ 确定下一个待选行。

12) 若 $\max_i \min_j D_{i,j} < \tau_2 \max_{\substack{y_{j+1} \leq y \leq y_n \\ x_0 \leq x \leq x_p}} |M_{y,x}|$, 则终止迭代, 并得到选点 $(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_p, y_0); \dots; (x_0, y_q), (x_1, y_q), \dots, (x_p, y_q)$ 。

13) 否则, 将行 b 添加到已选点序列。

2.3 终止条件

采用自适应 Newton-Thiele 有理插值构造给定函数值矩阵 \mathbf{M} , 可以避免逆差商不存在的情况。若 \mathbf{M} 中行和列的维数高, 则基于插值矩阵中所有给定点构造插值函数的过程变得十分复杂。若能使用尽可能少的点构造 Newton-Thiele 有理插值, 则可以减少计算复杂度、避免龙格现象。基于此, 本文构造 $R_{m,n}^{\text{NT}}(x, y)$ 时, 在点选择策略中添加终止条件。在构造 Newton-Thiele 有理插值函数的过程中, 若所构造插值函数与原函数在剩余行中各点相应值之间的误差小于给定的偏差, 则迭代停止, 不再选择任何其他点。本文采用的停止判断条件如下:

$$\max |R_{i,j}^{\text{NT}}(x_p, y_q) - f(x_p, y_q)| < \tau \max_{\substack{i < p \leq m \\ j < q \leq n}} |f(x_r, y_s)|, i < p \leq m, j < q \leq n.$$

在下面的例子中, 分别用自适应 Newton-Thiele 有理插值和 Newton-Thiele 有理插值 2 种方法对给定函数进行插值, 验证贪婪算法和终止条件的有效性。

3 实例分析

3.1 等距选点下的算法对比

为了验证自适应贪婪选点策略的有效性,本文采用自适应 Newton-Thiele 有理插值算法对函数 $f(x,y) = \ln(x+y)$ 进行插值。将函数 $f(x,y) = \ln(x+y)$ 的自变量取值范围限制在一个有限的矩形域内,待插值点在该矩形域内均匀分布,即待插值点的横坐标和纵坐标等距分布。矩形域内的横坐标和纵坐标的行、列逐步增加,以评估相应矩阵下函数插值构造的稳定性。具体来说,对于每一个迭代轮次 n ,矩形区域的横坐标点从 $\{1, 1 + \frac{1}{n-1}, \dots, 1 + \frac{n-2}{n-1}, 2\}$ ($n \geq 2$) 中选取;当 $n=1$ 时,横坐标为 1。矩形区域的纵坐标从 $\{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ ($n \geq 2$) 中选择;当 n 为 1 时,纵坐标仅为 0。可以看出,相应的水平坐标和垂直坐标均等距。计算出相应迭代轮次 n 的插值函数后,启动下一轮迭代;这个过程可以反复操作。

为了更好地比较插值效果,建立一个与本文算法对比的对照组,在对照组中使用矩阵中所有的点构造 Newton-Thiele 有理插值(简称 NT 有理插值)。为了比较本文算法和 Newton-Thiele 有理插值算法,引入插值函数与原函数之间的无穷范数误差。2 种插值算法得到的误差随迭代次数增加的变化情况如图 2 所示,其中 res1、res2 分别为带终止条件、不带终止条件的自适应贪婪选点算法误差,下同。

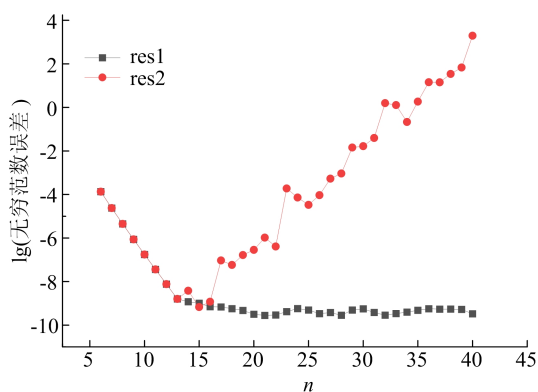


图 2 等距选点下本文算法与 NT 有理插值算法误差对比

图 2 中,对每一个迭代轮次 n ,要插值的点的总数为 n^2 。从图 2 可以看出,当 n 增加到 15 之前,2 种插值算法的误差变化几乎相同,随着插值点总

数的增加,误差逐渐减小。然而随着迭代轮次的增加,本文算法进一步减小误差,并使其保持在较低的水平。但如果不进行待插值点的选择,随着插值点增加,Newton-Thiele 有理插值误差会不减反增,这是由于插值点过多造成的龙格现象。

3.2 Newman 选点下的算法对比

给定函数 $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$,文献[22]证明 Newman 选点近似优于多项式近似。被插值函数 $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$,横坐标点从 $\{1, 1 + \frac{1}{n-1}, \dots, 1 + \frac{n-2}{n-1}, 2\}$ ($n \geq 2$) 中选取;当 $n=1$ 时,横坐标仅取 1。纵坐标利用 Newman 选点,由于给定函数的分母不能为 0,选点只取 Newman 选择点的右半部分,如 $(0, \eta^{(n-1)}, \dots, 1), \eta = e^{-\frac{1}{n}}$ 。

Newton-Thiele 二元连分式在不同插值条件下对 $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$ 的有理插值验证了自适应贪婪选点算法的数值稳定性和有效性。该算法运行时间短、收敛速度快、效果好。其收敛效果如图 3 所示。

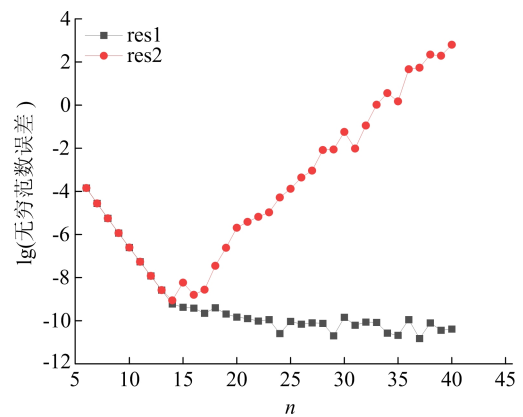


图 3 Newman 选点下本文算法与 NT 有理插值算法误差对比

4 图像插值应用

将本文算法应用于图像修复。文献[22]建立 NT(Newton-Thiele)算法对损坏图像进行修复,具体步骤如下:第 1 步,使用 Thiele 有理插值,即 T(Thiele)算法,对受损图像进行初次修复;第 2 步,使用 Newton-Thiele 有理插值对初次修复的图像进行再修复。本文算法的第 1 步与文献[22]的相同,第 2 步使用本文的自适应 Newton-Thiele 有理插值算法。

本文分别使用全变分(total variation, TV)算

法、计算机断层扫描(computed tomography,CT)算法^[24]、T 算法、NT 算法^[21]、基于自适应加权低秩分解(region-wise matching-weighted low-rank decomposition,RwM-WLRD)算法^[25]与本文算法,分别对 Boat、Girl、Bikes、Parrot 4 幅图像进行修复。由于篇幅限制,仅列出 Boat 和 Girl 的视觉效果对比,如图 4 和图 5 所示。从图 4、图 5 可以看出,本文算法的修复效果达到或接近最优。

6 种算法峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio,PSNR)见表 1 所列。由表 1 可知,与其他算法相比,本文算法的 PSNR 具有竞争性,修复效果更优。

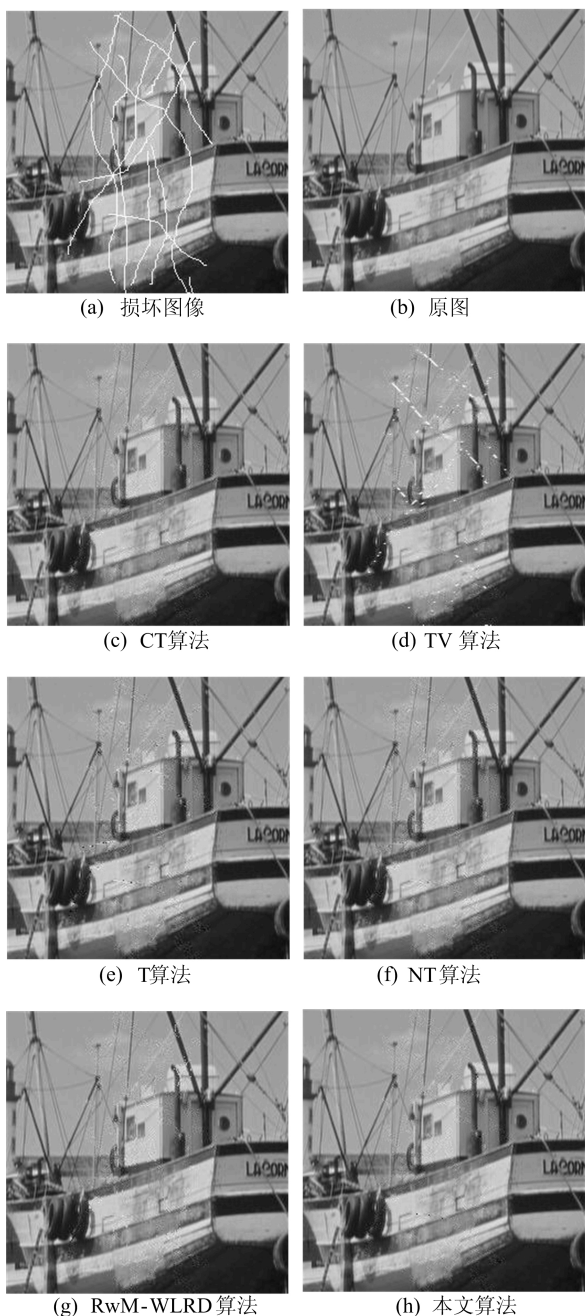


图 4 不同算法修复的 Boat 图像

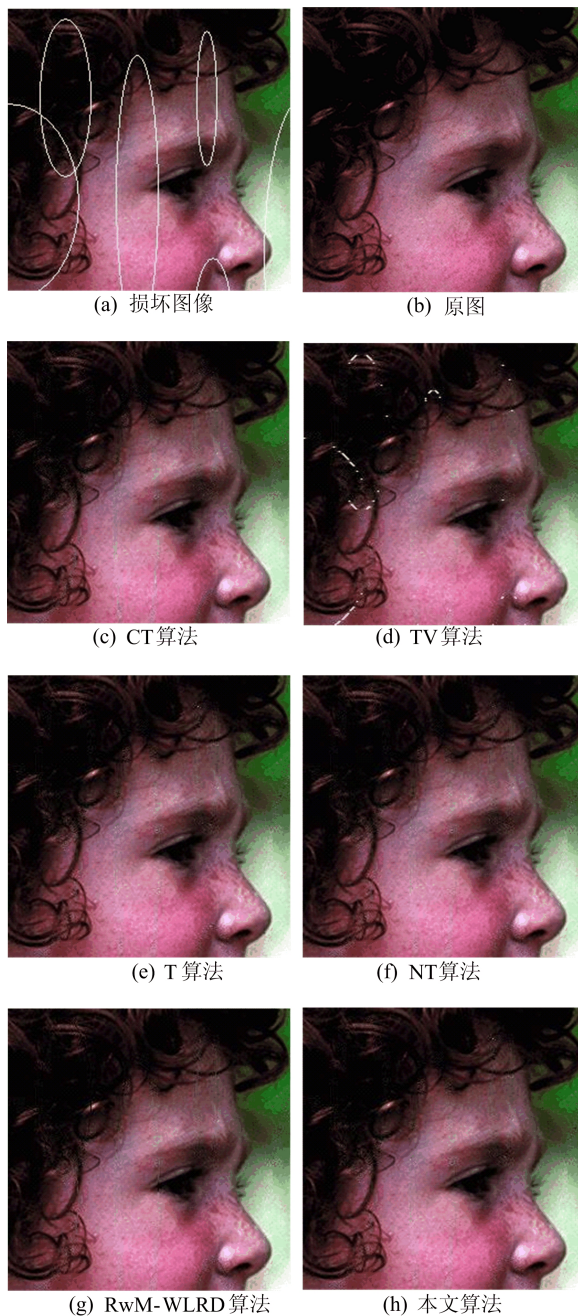


图 5 不同算法修复的 Girl 图像

表 1 6 种修复算法的 PSNR

图像	CT	TV	T	NT	RwM-WLRD	本文算法
Boat	33.48	29.19	31.68	32.28	31.37	33.57
Girl	35.60	28.60	35.65	35.90	35.47	35.89
Bikes	30.17	26.11	28.08	28.94	27.67	30.09
Parrot	30.26	26.17	27.37	28.19	26.73	28.91

为了更客观地评价修复图像效果,本文又采用结构相似性(structural similarity,SSIM)指标进行评估。SSIM 是从亮度、对比度、结构 3 个方面对 2 幅图像的相似性进行评估,计算公式如下:

$$SSIM = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}$$

其中: x, y 分别表示被比较的 2 个图像; μ, σ, σ_{xy} 分别表示图像的均值、标准差和协方差; C_1, C_2 是 2 个常数,用于计算的稳定性,它们的引入可防止

分母在除法过程中出现除数为 0 的错误,确保计算的稳定性。

6 种修复算法的 SSIM 见表 2 所列。从表 2 可以看出,与其他 5 种算法相比,本文算法的 SSIM 综合表现良好。

表 2 6 种修复算法的 SSIM

图像	SSIM					
	CT	TV	T	NT	RwM-WLRD	本文算法
Boat	0.999 944	0.999 895	0.999 910	0.999 898	0.999 923	0.999 946
Girl	0.999 974	0.999 901	0.999 973	0.999 911	0.999 980	0.999 978
Bikes	0.999 997	0.999 902	0.999 989	0.999 985	0.999 985	0.999 997
Parrot	0.999 930	0.999 792	0.999 912	0.999 895	0.999 940	0.999 921

5 结 论

针对 Newton-Thiele 有理插值存在逆差商为 0 的现象,本文提出一种自适应 Newton-Thiele 型连分式有理插值算法;通过带终止条件的自适应贪婪选点算法,可以自适应选取插值节点,避免出现龙格现象;实例计算表明,该算法在降低插值函数复杂度的同时保证了插值的数值稳定性;同时,将自适应 Newton-Thiele 型连分式有理插值应用于图像修复,也取得了很好的修复效果。今后将考虑将本文算法与深度学习相结合,同时继续研究连分式算法的改进及连分式插值在其他方面的应用。

[参 考 文 献]

[1] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables[M]. Addison-Wesley; Scientific Computing Service Ltd., 1964:55.

[2] BLANCH G. Numerical evaluation of continued fractions [J]. SIAM Review, 1964, 6(4):383-421.

[3] HO ENÉ-WROSKI J M. Introduction à la philosophie des mathématiques, et technie de l'algorithmie [M]. Paris: Courcier, 1811.

[4] HOENE-WROSKI J M. Philosophie de la technie algorithmique, loi suprême et universelle des mathématiques[M]. Paris; Hachette Bnf, 1815.

[5] BRAESS D. Nonlinear approximation theory[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1987, 17: 176-177.

[6] WALL H S. The analytic theory of continued fractions [M]. Princeton; Princeton University Press, 1948.

[7] JONES W B, THRON W J. Numerical stability in evaluating continued fractions[J]. Mathematics of Computation,

1974, 28(127):795-810.

[8] SKOROBOGATKO V. Branched continued fractions and their applications[M]. Moscow; Nauka, 1983.

[9] KUCHMINSKAYA K I, SIEMASZKO W. Rational approximation and interpolation of functions by branched continued fractions[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1987, 1237:24-40.

[10] SIEMASZKO W. Thiele-type branched continued fractions for two variable functions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1983, 9(2):137-153.

[11] TAN J Q, TANG S. Composite schemes for multivariate blending rational interpolation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 144(1/2):263-275.

[12] TAN J Q, FANG Y. Newton-thiele's rational interpolants [J]. Numerical Algorithms, 2000, 24(1/2):141-157.

[13] 檀结庆. 连分式理论及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2007.

[14] KARPENKOV O N. Geometric continued fractions[M]. Berlin, Heidelberg; Springer, 2022:87-96.

[15] PAHIRYA M M. On zeros of the numerator and denominator polynomials of Thiele's continued fraction[J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2022, 74(1):131-141.

[16] HU M, TAN J Q. Image compression and reconstruction based on bivariate interpolation by continued fractions[J]. International Society for Optics and Photonics, 2002, 4875: 87-92.

[17] LI C J, LI H, MA D D. Newton-Thiele type continued fraction defined on trapezoidal mesh in image inpainting[C]//2012 Fourth International Conference on Digital Home. [S. l.]; IEEE, 2012:288-292.

[18] LI S, XIE J, SONG L, et al. Image inpainting based on bivariate interpolation by continued fractions [C]//2012 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering. [S. l.]; IEEE, 2012:756-759.

[19] HE L, TAN J Q, SU Z, et al. Super-resolution by polar Newton-Thiele's rational kernel in centralized sparsity paradigm[J]. Signal Processing; Image Communication, 2015, 31:86-99.

[20] HE L, XING Y, TAN J Q, et al. Super-resolution recon-

- struction based on continued fractions interpolation kernel in the polar coordinates[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2018, 27(4): 1-19.
- [21] CELIS O S. Numerical continued fraction interpolation[J/OL]. (2023-02-22). <https://arxiv.org/abs/2109.10529>.
- [22] HE L, XING Y, TAN J Q. An adaptive image inpainting method based on continued fractions interpolation[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2018, 2018: 1-16.
- [23] NAKATSUKASA Y, SEETE O, TREFETHEN L N. The AAA algorithm for rational approximation[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2018, 40(3): A1494-A1522.
- [24] SHEN J, CHAN T F. Mathematical models for local non-texture inpaintings[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2002, 62(3): 1019-1043.
- [25] LIAO S, LIU X, HAN R, et al. Region-wise matching for image inpainting based on adaptive weighted low-rank decomposition[J/OL]. (2023-03-22). <https://arxiv.org/abs/2303.12421>.

(责任编辑 朱晓临)

(上接第 131 页)

本文对模型中每个参数在合理区间内随机取值,发现模型推导出的相关结论和数值分析中得出的管理启示均不改变,说明本文所建立模型的可靠性。

5 结 论

本文以单供应商和单零售商生产销售滞销品与畅销品为背景,在假定需求依赖零售商零售价格和供应商质量控制努力前提下,分别建立滞销品、畅销品独立销售和捆绑销售下的供应商、零售商占主导的 Stackelberg 博弈模型,通过对供应链双方最优决策和利润进行分析,得到一些重要的管理启示。进一步的研究方向是将本文模型推广到市场需求同时依赖零售商定价和广告投入以及供应商质量控制努力情形、带有公平偏好情形、多供应商单零售商捆绑销售情形等。

[参 考 文 献]

- [1] SHENG S, PAN Y. Bundling as a new product introduction strategy: the role of brand image and bundle features[J]. *Journal of Retailing & Consumer Services*, 2009, 16(5): 367-376.
- [2] 潘林, 周水银. 考虑捆绑销售的多产品供应链定价策略[J]. *运筹与管理*, 2016, 25(6): 11-17.
- [3] XU QY, XU B, WANG P, et al. Bundling strategies for complementary products in a horizontal supply chain[J]. *Kybernetes*, 2018, 47(6): 1158-1177.
- [4] 潘林, 周水银, 马士华. 供应链环境下零售商互补产品捆绑销售决策研究[J]. *管理工程学报*, 2018, 32(4): 118-125.
- [5] 潘林, 周水银, 马士华. 供应链互补产品广告投入和捆绑销售联合决策研究[J]. *运筹与管理*, 2018, 27(2): 15-25.
- [6] BANCIU M, DEGAARD F. Optimal product bundling with dependent valuations: the price of independence[J]. *European Journal of Operational Research*, 2016, 255(2): 481-495.
- [7] 刘卫华, 于辉. 供应商两种捆绑销售策略的供应链分析[J]. *系统科学与数学*, 2017, 37(5): 1231-1243.
- [8] 刘卫华, 于辉. 供应商捆绑销售策略下的供应链冲突分析[J]. *系统工程学报*, 2019, 34(6): 820-830.
- [9] 但斌, 高艳, 掌曙光. 产品服务供应链中延保服务销售策略研究[J]. *管理评论*, 2020, 32(4): 171-182.
- [10] 吴思卓, 汪峻萍. 不同权力结构下捆绑销售产品供应链博弈分析[J]. *合肥工业大学学报(自然科学版)*, 2020, 43(12): 1703-1712.
- [11] 肖迪, 潘可文. 基于收益共享契约的供应链质量控制与协调机制[J]. *中国管理科学*, 2012, 20(4): 67-73.
- [12] 胡军, 张镓, 芮明杰. 线性需求条件下考虑质量控制的供应链协调契约模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(3): 601-609.
- [13] 许民利, 沈家静. 公平偏好下制造商收益分享与供应商质量投入研究[J]. *系统管理学报*, 2014, 23(1): 30-35.
- [14] 张斌, 汪峻萍. 需求依赖价格、广告投入和质量控制的供应链模型[J]. *数学的实践与认识*, 2016(24): 15-21.
- [15] 闫峰, 梁工谦, 刘昕, 等. 公平偏好下考虑供应商质量投入的供应链契约协调[J]. *运筹与管理*, 2018, 27(3): 50-58.
- [16] 唐松祥, 梁工谦, 李洁, 等. 考虑供应商双重公平偏好的供应链质量控制策略[J]. *系统工程*, 2019, 37(4): 92-99.
- [17] 李绩才, 周永务, 李昌文, 等. 考虑公平关切的供应链产品质量与零售定价博弈决策分析[J]. *软科学*, 2017, 31(3): 139-144.
- [18] 胡军, 张镓, 芮明杰. 线性需求条件下考虑质量控制的供应链协调契约模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(3): 601-609.

(责任编辑 张 镗)