

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2023.06.014

## 基于特征点匹配的点云配准方法研究

欧鑫, 高飞, 崔浩, 叶周润, 汤毅

(合肥工业大学 土木与水利工程学院, 安徽 合肥 230009)

**摘要:**针对快速点特征直方图(fast point feature histogram, FPFH)与迭代最近点(iterative closest point, ICP)算法结合的配准方法达不到精度要求的问题,文章在 FPFH 的基础上加入特征点的提取与匹配,使得配准精度进一步提升。该方法先通过尺度不变特征变换(scale-invariant feature transform, SIFT)算法和 3DHarris 算法对点云数据的特征点进行提取,再通过计算 FPFH 寻找对应点对,使用随机采样一致性(random sample consensus, RANSAC)算法剔除错误点对,通过奇异值分解(singular value decomposition, SVD)算法计算初始旋转矩阵和平移矩阵,最后用传统 ICP 精配准。结果表明,基于特征点匹配的算法相比基于特征描述的算法精度更高。

**关键词:**特征点提取;特征点匹配;奇异值分解(SVD)算法;迭代最近点(ICP);点云配准

**中图分类号:**P237 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2023)06-0808-06

### Research on point cloud registration method based on feature point matching

OU Xin, GAO Fei, CUI Hao, YE Zhourun, TANG Yi

(School of Civil and Hydraulic Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that the accuracy of the registration method combining the fast point feature histogram (FPFH) and the iterative closest point (ICP) algorithm is not satisfactory, the extraction and matching of feature points are added on the basis of FPFH, which further improves the registration effect. This method first extracts the feature points of the point cloud data through the scale-invariant feature transform (SIFT) algorithm and the 3DHarris algorithm, then finds the corresponding point pairs by calculating FPFH, uses the random sample consensus (RANSAC) algorithm to eliminate the wrong point pairs, and calculates the initial rotation matrix and translation matrix by the singular value decomposition (SVD) algorithm, and finally uses the traditional ICP to perform fine registration. The results show that the algorithm based on feature point matching has higher accuracy than the algorithm based on feature description.

**Key words:** feature point extraction; feature point matching; singular value decomposition (SVD); iterative closest point (ICP); point cloud registration

三维激光扫描技术是一种在不接触被测物体的情况下就可以得到物体表面的三维坐标信息以及反射信息的技术,而获得的数据统称为点云数据。该技术被广泛应用于机器人识别、自动导航、

文物保护等领域<sup>[1]</sup>。

在点云数据的采集中,由于物体的大小以及表面问题,而不能一次性获取被测物体的全部点云数据,需要进行多个测站数据的采集。为了得

收稿日期:2022-01-10;修回日期:2022-03-02

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金资助项目(41904010);安徽省自然科学基金资助项目(2008085MD115);大地测量与地球动力学国家重点实验室开放基金资助项目(SKLGED2022-1-4)和中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(JZ2021HGTD0107)

作者简介:欧鑫(1997—),男,广西北海人,合肥工业大学硕士生;  
高飞(1962—),男,安徽天长人,合肥工业大学教授,博士生导师。

到完整的点云数据模型,必须对各测站点云进行拼接,即将不同坐标系下的点云数据通过旋转平移到同一坐标系中。

最为经典的配准方法是迭代最近点(iterative closest point, ICP)算法<sup>[2]</sup>,有不少学者对传统ICP算法进行了改进<sup>[3]</sup>,但该算法在没有良好的初始位置时,容易陷入局部最优,因此现在的算法大多数先通过粗配准获得良好的初始位置,再使用ICP算法进行精配准<sup>[4-5]</sup>。常用的粗配准算法一般为基于特征描述的配准算法。常见的特征描述算子有快速点特征直方图(fast point feature histogram, FPFH)<sup>[6]</sup>、归一化对齐特征(normal aligned rodial features, NARF)<sup>[7]</sup>、局部特征直方图(local signature feature histogram, LSFH)<sup>[8]</sup>等。基于特征描述的特征匹配算法不太适用于稠密的点云,这是由于计算每个点的特征描述会极大影响点云配准的效率<sup>[9]</sup>。本文进一步提出了特征点与特征描述相结合的特征匹配算法,只需计算特征点的特征描述,再对其进行点对配对,最后计算初始矩阵。

## 1 点云粗配准

为了给ICP算法求得一个好的变换矩阵,本文使用了基于特征点配对的粗配准方法,具体流程如下:首先采用尺度不变特征变换(scale-invariant feature transform, SIFT)算法<sup>[10]</sup>以及3DHarris算法<sup>[11]</sup>对点云进行特征点提取,计算FPFH特征,再基于FPFH特征找寻点对关系,使用随机采样一致性(random sample consensus, RANSAC)算法进行错误点对的剔除,最后使用奇异值分解法(singular value decomposition, SVD)求得变换矩阵,完成粗配准。

### 1.1 3DSift 算法原理

(1) 建立点云的尺度空间。在点云的三维空间中,通过体素网格的方式进行点云体素化,设置体素网格的大小,计算体素网格包含点云的重心,再用各个重心替代每个体素网格内所包括的点云,构成新点集,该步骤用公式表述为:

$$\mathbf{I}_i(x, y, z, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \mathbf{p}_q \quad (1)$$

其中: $\mathbf{I}_i(x, y, z, \theta)$ 为第 $i$ 个体素网格内包含点云的重心坐标; $\mathbf{p}_q$ 为第 $i$ 个体素网格内包含点云中第 $q$ 个点的三维坐标; $n$ 为第 $i$ 个体素网格中点的数目。由 $\mathbf{I}_i(x, y, z, \theta)$ 构成的点集则是在体素网格大小为 $d$ 下进行降采样后的原点云。

(2) 建立点云高斯差分金字塔<sup>[12]</sup>。设金字塔共有 $n$ 组,每组有 $S$ 层,则组内第 $s$ 层的尺度为:

$$\theta_s = \theta_0 2^{s/S}, \quad s \in \{0, \dots, S+2\} \quad (2)$$

其中: $\theta_0$ 为点云的基准尺度; $\theta_s$ 为点云金字塔组内第 $s$ 层的尺度。

通过计算相邻尺度下采样点的高斯响应值 $R$ ,可以进一步计算其高斯差分值 $R_{\text{DOG}}$ 。对采样点及距离采样点 $3\sigma$ 范围内的点进行高斯曲率加权,高斯响应值 $R$ 和高斯差分值 $R_{\text{DOG}}$ 的计算公式表示为:

$$R = \sum_{i=1}^k \rho_i \omega_i / \sum_{i=1}^k \omega_i \quad (3)$$

$$\omega_i = \exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

$$R_{\text{DOG}} = R - R_1 \quad (5)$$

其中: $\rho_i$ 为采样点第 $i$ 个近邻点的曲率; $\omega_i$ 为加权数; $\mu$ 为采样点到相邻点的间距; $\sigma$ 为采样点所在尺度空间的大小; $R_1$ 为上一尺度的高斯响应值。

(3) 检测特征点。若该点在 $R_{\text{DOG}}$ 尺度空间本层内的 $R_{\text{DOG}}$ 值为最值,以及与相邻上下2个尺度层内的 $R_{\text{DOG}}$ 对比仍是最值时,则认为该点为特征点。

### 1.2 3DHarris 提取特征点

在三维点云空间中,选取点 $O$ 作为中心,再以 $k$ 为半径来建立空间区域,将区域 $p$ 内所有的点进行主成分分析(principal component analysis, PCA),根据最小二乘法原理生成一个二次曲面 $f(x, y)$ ,其展开式为:

$$f(x, y) = \frac{O_1}{2}x^2 + O_2xy + \frac{O_3}{2}y^2 + O_4x + O_5y + O_6 \quad (6)$$

计算 $f(x, y)$ 的 $x$ 和 $y$ 的偏导,近似点云点强度 $I$ ,进而解出矩阵 $\mathbf{M}$ 中各个元素的值如下:

$$\mathbf{M} = \sum \omega(x, y) \begin{bmatrix} I_x^2 & I_x I_y \\ I_x I_y & I_y^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{R_2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) f_x(x, y) dx dy \quad (8)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{R_2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) f_y(x, y) dx dy \quad (9)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{R_2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \times$$

$$f_x(x,y)f_y(x,y)dxdy \quad (10)$$

$w(x,y)$  是  $5 \times 5$  窗口权函数(根据实际设置), (8)~(10)式积分后可得  $A, B, C$  值, 即

$$A = O_4^2 + 2O_1^2 + 2O_2^2 \quad (11)$$

$$B = O_5^2 + 2O_2^2 + 2O_3^2 \quad (12)$$

$$C = O_4O_5 + 2O_1O_2 + 2O_2O_3 \quad (13)$$

最后再计算 Harris 响应值  $R$ :

$$R = \det \mathbf{M} - k(\text{trace } \mathbf{M})^2 \quad (14)$$

将计算的  $R$  与设定的检测值  $R_q$  对比, 当  $R > R_q$  时, 则该点为特征点。

### 1.3 RANSAC 算法

RANSAC 算法常被用于提取正确匹配点对和剔除错误匹配点对, 该算法具有良好的抗噪性<sup>[13]</sup>。利用对应关系估计对错误匹配的剔除进行预处理, RANSAC 算法效率更高。具体流程如下。

首先使用合适的转换模型使点对之间进行拟合。点对关系需要满足:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ R_4 & R_5 & R_6 \\ R_7 & R_8 & R_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中:  $R_i (i=1, 2, 3, \dots, 9)$  为旋转参数;  $X_0, Y_0, Z_0$  为平移参数;  $(X_2, Y_2, Z_2)$  为源点云;  $(X_1, Y_1, Z_1)$  为目标点云。

迭代过程中, 需要计算(15)式中的旋转平移参数, 为此需要选择至少 4 组点对进行求解。为了有效选取点对, 将对应关系估计用做点对筛选, 从而提升 RANSAC 剔除点对的效率。记源点云  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  和目标点云  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  的特征分别为  $\{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}\}$  和  $\{q_{j1}, q_{j2}, \dots, q_{jm}\}$ 。对于源点云的任一特征  $p_{fi} (i < n) \in \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}\}$ , 目标点云特征中与  $p_{fi}$  最相似的特征  $q_{fj} (j < n_2)$ , 同时目标点云特征  $q_{fj}$  在源点云中不存在与  $q_{fj}$  最相似的特征  $p_{fw} (w < n)$ , 若满足

$$\begin{cases} i = w, \\ \sqrt{\sum_{s=1}^{s_n} \| p_{fi}^s - q_{fj}^s \|^2} \leq C \end{cases} \quad (16)$$

则判定  $p_i$  和  $q_j$  是一对正确的点对  $(p_i, q_j)$ 。其中,  $s_n$  为特征维数, 可取值为 33 或 125,  $C$  为所设常数。获得的点对可以用来估算转换参数  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{T}$ 。将剩余点对  $(p_i, q_j)$ , 计算其距离  $d = \| \mathbf{R}p_i + \mathbf{T} - q_j \|^2$ , 根据距离  $d$  与所设阈值的比对, 判定该点对  $(p_i, q_j)$  是内点或者外点。每次迭代, 统计使用该组参数获得的内点数目  $n$ , 直至达到所设迭代次数。当该组转换参数所得内点数目  $n$  最大

时, 则其为最优参数, 所获得的  $n$  对内点可以通过 1.4 节介绍的 SVD 算法计算旋转平移矩阵完成粗配准。

### 1.4 SVD 算法

SVD 算法的基本思想是将一个复杂的矩阵可以拆分为几个简单矩阵来表示。正是基于这种思想算法具有良好的抗噪性和稳定性<sup>[14]</sup>。该思想用公式表示为:

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{Y}^T \quad (17)$$

其中:  $\mathbf{U}$  为  $M \times N$  的矩阵;  $\mathbf{X}$  为  $M \times M$  的矩阵, 称  $\mathbf{X}$  矩阵内的向量为左奇异向量, 且向量相互正交;  $\mathbf{Z}$  为  $M \times N$  的矩阵, 其构成为对角线上元素为奇异值, 其余数值为 0;  $\mathbf{Y}^T$  为  $N \times N$  的矩阵, 称矩阵  $\mathbf{Y}^T$  内的向量为右奇异向量, 其内部向量也相互正交。

假设 2 个点云分别为  $P = \{p_i, i=1, 2, 3, \dots, n_p\}$  和  $Q = \{q_j, j=1, 2, 3, \dots, n_q\}$ , 其中  $n_p, n_q$  分别代表 2 个点云的总点数。点  $p_i$  和  $q_j$  的关系可以表示为:

$$q_j = \mathbf{R}p_i + \mathbf{T} \quad (18)$$

其中:  $\mathbf{R}$  为旋转矩阵;  $\mathbf{T}$  为平移矩阵。相应的目标函数可表示为:

$$\min \left( \sum_{i=1}^L \| q_j - (\mathbf{R}p_i + \mathbf{T}) \|^2 \right) \quad (19)$$

然后对  $\mathbf{R}$  进行 SVD 分解可得:

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{Y}^T \quad (20)$$

(20)式可以更有效率地求取旋转矩阵, 再通过(18)式求得平移矩阵。

## 2 点云精配准

粗配准后可以获得一个初始矩阵, 使得 2 个点云拟合到一个比较好的位置, 但一般还不完全重合, 此时就需要对点云进行精配准。

ICP 算法基本原理为分别在源点云  $P = \{p_i, i=1, 2, 3, \dots, n\}$  和目标点云  $Q = \{q_i, i=1, 2, 3, \dots, n\}$  中, 对于任意点对  $(p_i, q_i)$ , 设误差函数为:

$$\theta(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \| q_i - (\mathbf{R}p_i + \mathbf{T}) \|^2 \quad (21)$$

其中,  $n$  为邻近点个数。

通过迭代计算, 直到  $\theta$  小于设定的阈值  $\min$ , 也就是通过不断求解 2 个点云间的变换关系, 更新 2 个点云位置, 直到收敛于设定阈值, 即找出最优转换矩阵  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{T}$ 。具体步骤为:

- (1) 在目标点云  $P$  中取点  $p_i \in P$ ;
- (2) 源点云  $Q$  中取点  $q_i \in Q$ , 其两点关系满

足  $\|q_i - p_i\|^2 = \min;$

(3) 使用该点计算相应的转换矩阵  $R$  和  $T$ ;

(4) 对点  $p_i$  使用满足步骤(3)的转换矩阵, 得点  $p_i^1 = Rp_i + T, p_i^1 \in P$ , 即源点云变换到了新的位置;

(5) 计算  $p_i^1$  与对应点  $q_i$  的误差函数  $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|q_i - p_i^1\|^2;$

(6) 如果误差函数  $\theta$  小于所设阈值  $\min$  或者迭代次数大于预设的迭代次数, 那么终止运算, 输出最终矩阵, 否则返回步骤(2), 直到满足给定条件为止。

这样经过多次迭代, 点云  $P$  就会越来越接近  $Q$ , 最终实现重合, 这是迭代最近点 ICP 算法的基本思想。

### 3 实例分析

实验采用斯坦福大学提供 Dragon 以及 Armadillo\_scans 点云数据进行仿真实验。Dragon 选取了 dragonStandRight\_0 和 dragonUpRight\_0, 点数目分别为 41 841、42 641 个; Armadillo\_scans 选取了 ArmadilloSide\_105 和 ArmadilloOn-HeadMultiple\_0, 点数目分别为 29 715、32 385 个。

实验在 VS 2017、Win 10 系统、内存 16 GiB 下进行。两点云位置如图 1 所示, 图 1 中: 绿色为源点云; 红色为目标点云。实验过程为通过粗配准获得初始矩阵后, 使用 ICP 算法不断迭代计算变换矩阵, 使得绿色点云向红色点云逐渐靠近, 最终实现重合。

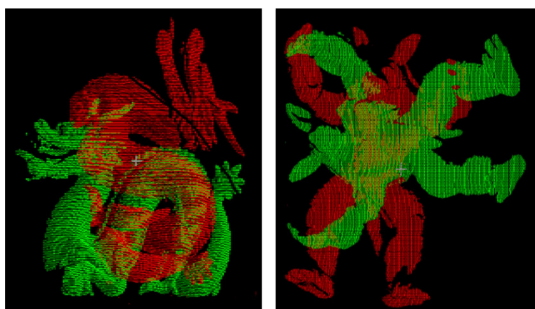
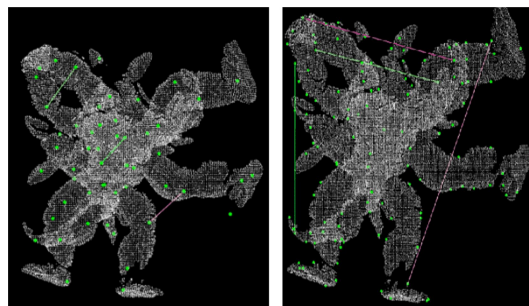


图 1 点云初始位置

#### 3.1 Armadillo 点云配准结果

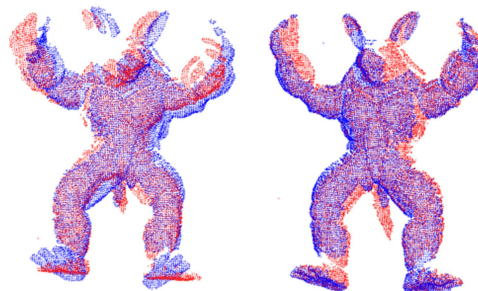
特征点匹配如图 2 所示(连线为对应点对)。

经过粗配准以及精配准后所得配准结果如图 3 所示。



(a) Harris特征点 (b) SIFT特征点

图 2 Armadillo 点云特征点对匹配

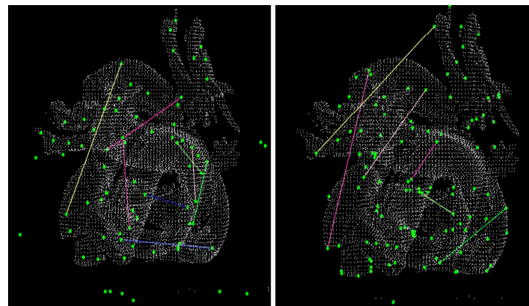


(a) 基于Harris算法 (b) 基于IFTS算法

图 3 Armadillo 点云配准结果

#### 3.2 Dragon 点云配准结果

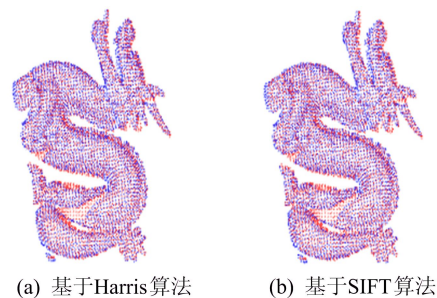
特征点匹配如图 4 所示(连线为对应点对)。



(a) Harris特征点 (b) SIFT特征点

图 4 Dragon 点云特征点对匹配

经过粗配准以及精配准后所得配准结果如图 5 所示。

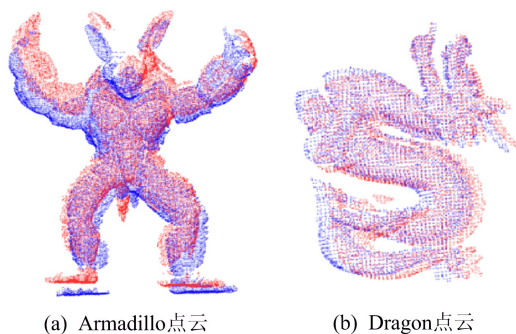


(a) 基于Harris算法 (b) 基于SIFT算法

图 5 Dragon 点云配准结果

### 3.3 FPFH 与 ICP 结合算法配准结果

两点云直接使用 FPFH 与 ICP 结合算法的配准结果如图 6 所示。



(a) Armadillo点云 (b) Dragon点云

图 6 FPFH 与 ICP 结合算法配准结果

从图 6 可以看出,2 个模型中的 2 幅点云都

不能很好地重合在一起,这是粗配准效果不好,所得初始矩阵并不能满足 ICP 算法要求,从而导致 ICP 算法进行求解时陷入局部最优<sup>[15]</sup>。配准数据对比见表 1 所列。

从图 2~图 6 以及表 1 可以看出,基于特征点提取的配准算法比只基于特征描述的配准算法效果要好,因此本文提出的算法具有一定的可靠性。

再对比本文中使用的 2 种特征点提取方法,在 Armadillo 点云模型中,基于 SIFT 算法在配准误差以及配准时间上都优于基于 Harris 算法,图 3 中配准效果也比较好;在 Dragon 点云模型中,两者的配准误差差距不大,图 5 中两者配准效果基本相同,但在时间效率上,仍是基于 SIFT 的算法比较好。

表 1 不同算法配准结果比较

模型	配准方法	特征点数(S,T)	全部点对数	R 点对数	配准误差/cm	配准时间/s
Armadillo	基于 Harris	(31,25)	7	3	$1.48 \times 10^{-4}$	389
	基于 SIFT	(57,65)	28	4	$9.82 \times 10^{-6}$	72
	基于 FPFH				$1.92 \times 10^{-4}$	467
Dragon	基于 Harris	(50,65)	10	8	$8.04 \times 10^{-6}$	132
	基于 SIFT	(50,57)	20	6	$8.02 \times 10^{-6}$	20
	基于 FPFH				$2.36 \times 10^{-4}$	163

注:S 为源点云数,T 为目标点云数,R 点对数为 RANSAC 处理后的点对数。

## 4 结 论

本文针对在点云配准中使用 FPFH 与 ICP 结合的算法达不到配准精度的问题,提出了一种基于特征点匹配的点云配准算法,使用 SIFT 和 3DHarris 算子提取特征点,特征点集根据 FPFH 特征描述进行点对匹配,再使用 RANSAC 算法进行错误点对去除,使用 SVD 算法对剩余点对进行解算,完成粗配准,得到初始矩阵,最后使用传统 ICP 精配准,得到最终结果。实验表明,该算法在配准效果上优于 FPFH 与 ICP 结合算法,在基于 SIFT 算法和基于 Harris 算法两者的比较中,进一步得出使用 SIFT 算法进行特征点提取匹配,可以得到更好的初始矩阵,且在时间效率上要远优于 Harris 的结论。在真实场景中,面临数目更加庞大的点云,对算法效率的提升以及阈值的设置是今后研究的重要方向。

### [参 考 文 献]

[1] 朱德海. 点云库 PCL 学习教程[M]. 北京: 航空航天大学出版社, 2012.

- [2] BESL P J, MCKAY N D. A method for registration of 3-D shapes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.
- [3] LI Q, GRIFFITHS J G. Iterative closest geometric objects registration[J]. Computer & Mathematics with Applications, 2000, 40(10): 1171-1188.
- [4] 易倩, 钟浩宇, 刘龙, 等. 基于 ROI-RSICP 算法的车轮廓形动态检测[J]. 中国激光, 2020, 47(11): 154-165.
- [5] DU S Y, ZHENG N N, XIONG L, et al. Scaling iterative closest point algorithm for registration of m-D point sets [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2010, 21(5/6): 442-452.
- [6] RUSU R B, BLODOW N, BEETZ M. Fast point feature histograms (FPFH) for 3D registration[C]//2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.]: IEEE, 2009: 3212-3217.
- [7] STEDER B, RUSU R B, KONOLIGE K, et al. Point feature extraction on 3D range scans taking into account object boundaries[C]//2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.]: IEEE, 2011: 2601-2608.
- [8] YANG J Q, CAO Z G, ZHANG Q. A fast and robust local descriptor for 3D point cloud registration[J]. Information Sciences, 2016, 346/347: 163-179.

- [2] DOEBLING S W, FARRAR C R, PRIME M B. A summary review of vibration-based damage identification methods [J]. *The Shock and Vibration Digest*, 1998, 30(2): 91-105.
- [3] SOHN H, FARRAR C R, HEMZ F, et al. A review of structural health monitoring literature 1996—2001: LAUR-02-2095[R]. New Mexico: Los Alamos National Laboratory, 2002: 1-7.
- [4] CATTARIUS J, INMAN D J. Time domain analysis for damage detection in smart structures[J]. *Mechanical System and Signal Processing*, 1997, 11(3): 409-423.
- [5] LI X L, HALDAR A. Element level system identification with unknown input rayleigh damping[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, 130(8): 877-885.
- [6] KAWATANI M, KOBAYASHI Y, TAKAMORI K. Non-stationary random analysis with coupling vibration of bending and torsion of simple girder bridges under moving vehicles[J]. *Doboku Gakkai Ronbunshu*, 1997(570): 231-238.
- [7] 卜建清, 王树栋, 罗绍湘. 由车激响应识别桥梁损伤的灵敏度方法[J]. *振动与冲击*, 2007, 26(7): 80-84.
- [8] LU Z R, LAW S S. Identification of system parameters and input force from output only[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2007, 21: 2099-2111.
- [9] 赵俊, 张伟伟, 马宏伟. 移动荷载作用下简支梁的动力响应及裂纹损伤识别研究[J]. *振动与冲击*, 2011, 30(6): 97-103.
- [10] 鞠炳照. 基于车桥耦合振动的混凝土简支梁桥损伤诊断方法[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
- [11] YANG Y B, LIN C W, YAU J D. Extracting bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 272(6): 471-493.
- [12] 盛宏玉. 结构动力学[M]. 2 版. 合肥: 合肥工业大学出版社, 2007.
- [13] 李世荣, 孙云, 刘平. 关于 Euler-Bernoulli 梁几何非线性方程的讨论[J]. *力学与实践*, 2013, 35(2): 77-80.
- [14] LI X F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 318: 1210-1229.
- [15] SIMSEK M, KOCATURK T. Nonlinear dynamic analysis of an eccentrically prestressed damped beam under a concentrated moving harmonic load[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 320(1): 235-253.
- [16] 夏禾, 张楠. 车辆与结构动力相互作用[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2005.

(责任编辑 张 镛)

## (上接第 812 页)

- [9] 王珊, 王春阳. 基于特征点匹配的三维点云配准算法[J]. *国外电子测量技术*, 2020, 39(12): 23-28.
- [10] LOWE D G. Distinctive image features from scale invariant keypoints[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2004, 60(2): 91-110.
- [11] HARRIS C, STEPHENS M. A combined corner and edge detector[C]//*Proceedings of the Alvey Vision Conference*. [S. l.]: Springer, 1988: 147-151.
- [12] 鲁铁定, 袁志聪, 郑坤. 结合尺度不变特征的 Super 4PCS 点云配准方法[J]. *遥感信息*, 2019, 34(5): 15-20.
- [13] FISCHLER M A. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography[J]. *Readings in Computer Vision*, 1987: 726-740.
- [14] 赵夫群, 耿国华. 基于图像特征和奇异值分解的点云配准算法[J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(10): 237-243.
- [15] 俞浩, 高飞. 基于特征向量的点云配准方法研究[J]. *合肥工业大学学报(自然科学版)*, 2020, 43(7): 958-962.

(责任编辑 李 凯)