第 46 卷第 5 期 2023 年 5 月
合肥工业大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY (NATURAL SCIENCE)
Vol. 46 No. 5 May 2023

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2023.05.021

循环码的像构造 2 类新量子码

郭宏哲, 朱士信

(合肥工业大学 数学学院,安徽 合肥 230601)

摘　要:文章给出 2 类循环码的像是厄米特自正交码的充分条件;对得到的 2 类厄米特自正交码,使用厄米特构造方法得到 2 类新的量子码;2 类新量子码与同长度已有量子码对比,有更大的最小距离或更高的码率。

关键词:量子纠错码;循环码;厄米特自正交;厄米特构造

中图分类号:TN911.22　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1003-5060(2023)05-0704-05

Two new classes of quantum codes derived from images of cyclic codes

GUO Hongzhe, ZHU Shixin

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230601, China)

Abstract: In this paper, sufficient conditions for the images of two classes of cyclic codes to be Hermitian self-orthogonal are given. Two new classes of quantum codes are obtained from the Hermitian self-orthogonal image of cyclic codes by using Hermitian construction. These new quantum codes obtained have better parameters than the known ones with same lengths such as larger minimum distance or higher code rate.

Key words: quantum error-correcting codes; cyclic codes; Hermitian self-orthogonal; Hermitian construction

0 引　言

量子纠错码理论的研究始于 20 世纪 90 年代末,文献[1-3]证明了量子纠错码的存在。随着第 1 个量子纠错码实例的出现,研究人员陆续提出了许多构造量子纠错码的方法,如厄米特构造、(CSS) Calderbank-Shor-Steane 构造法和辛自正交构造。近年来,许多研究人员致力于利用厄米特自正交码构造良好的量子纠错码,并取得了一系列成果。文献[4]给出了常循环码是厄米特自正交码的充要条件,并利用厄米特构造得到了新的量子最大距离可分(maximum distance separable, MDS)纠错码。研究人员试图使用不同种类的纠错码来构造量子纠错码。文献[4-6]分别从常循环码、RS(Reed-Solomon)码、BCH(Bose-Chaudhuri-Hocquenghem)码中获得一些好的量子纠错码。循环码易于编码,经常被用于构造其他码,如 Kerdock 码、Preparata 码和 Justesen 码。随着研究的深入,研究人员发现循环码可以构造良好的量子纠错码[7-8]。文献[9]得出 q^m-元循环码的 q-元像也是循环码的条件。此后,循环码的像开始被用来构造量子纠错码,许多成果表明,这种构造方法有其自身的优点。文献[8]利用 4^m-元循环码的厄米特自正交像得到了良好的量子纠错码;文献[10]研究了 q^m-元码的 q-元像在广义上自正交的条件,并利用 4^m-元循环码的自正交像构造新的量子纠错码。

本文对循环码的厄米特自正交像构造量子纠

收稿日期:2022-03-15;**修回日期**:2022-04-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61772168;61972126;12001002;62002093);安徽省自然科学基金资助项目(80808QA04)

作者简介:郭宏哲(1994—),女,安徽五河人,合肥工业大学硕士生;
朱士信(1962—),男,安徽枞阳人,博士,合肥工业大学教授,博士生导师.

错码作了进一步研究。定义了一类映射,并给出关于循环码的像的几个性质;给出了 q^{2m}-元长度分别为 $n=(q^{2m}-1)/(q-1)$、$n=(q^{2m}-1)/(q^2+1)$($m>2$ 偶数)的循环码的 q^2-元像是厄米特自正交的充分条件;对有 q^{2m}-元循环码的 q^2-元厄米特自正交像,使用厄米特构造得到 2 类新的量子循环码;与已知的量子纠错码相比,2 类新的量子纠错码具有更高的码率或更大的最小距离。本文约定 q 是素数 p 的次幂。

1 基本概念

令 F_q 为含 q 个元素的域,长度为 n 的 q-元线性码 C 可以看作是 F_q^n 的非空线性子空间,$\gcd(n,q)=1$。

定义 1 设 C 为长度为 n 的 q-元线性码,则码 C 是循环码当且仅当对任意 $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in C$ 都有 $(a_{n-1},a_0,a_1,\cdots,a_{n-2})\in C$。

长度为 n 的 q-元循环码 C 可以看作 $F_q[z]/\langle z^n-1\rangle$ 的一个理想,其中 $\gcd(n,q)=1$。因此 C 可以表示为 $C=\langle g(z)\rangle$,其中 $g(z)$ 是 F_q 上的首一多项式并且是 z^n-1 的一个因子,$\langle g(z)\rangle$ 是由 $g(z)$ 生成的 $F_q[z]/\langle z^n-1\rangle$ 的一个理想。称 $g(z)$ 为 C 的生成多项式。在 $F_q[z]$ 中,对任意 $a(z)\in C$,$a(z)$ 可以被唯一表示为 $a(z)=b(z)\times g(z)$。设 ξ 为 n 次本原单位根,在扩域 F_{q^m} 上,$z^n-1=\prod_{i=0}^{n-1}(z-\xi^i)$,其中 $m=\min\{k\mid n\mid(q^k-1)\}$。

集合 $C_q[k,n]=\{k,qk,q^2k,\cdots,q^{l_k-1}k\}$ 称为包含 k 的 q-模 n 分圆陪集,l_k 满足 $q^{l_k}k\equiv k(\bmod n)$。若 k 是集合中的最小值,则称 k 为陪集首。集合 $I=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 可以被划分为分圆陪集 $I=\bigcup_{k\in K}C_q[k,n]$,$K$ 是模 n 陪集首的集合。因此 $g(z)=\prod_k\prod_{i\in C_q[k,n]}(z-\xi^i)$,其中,$k$ 遍历集合 K 的某子集 K_0。称 $g(z)$ 的根 ξ^i 为码的零点。设 $g(z)$ 的根的集合为 $T_0=\{j\mid j\in\bigcup_{k\in K_0}C_q[k,n]\}$,并称 T_0 为码 C 的零点集,即定义集。设 $h(z)=(z^n-1)/g(z)$,$h(z)$ 称为 C 的奇偶校验多项式,$h(z)$ 的根的集合称为 C 的非零点集,设为 T_1,则 $T_1=\{j\mid 0\leqslant j\leqslant n-1\}\backslash T_0$。

定义 2 若 $g(z)$ 是 F_q 上以 $\xi^b,\xi^{b+1},\cdots,\xi^{b+\delta-2}$ 为根的最低次首一多项式,则 $C=\langle g(z)\rangle$ 是 F_q 上设计距离为 δ 的 BCH 码,其中 $b\geqslant 0$。

定理 1(BCH 界)[11] 若 C 是 F_q 上长度为 n、设计距离为 δ 的 BCH 码,则 C 的最小距离 $d\geqslant\delta$。

2 循环码及其像的自正交

定义 3 设 $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$,$\boldsymbol{b}=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})\in F_{q^2}^n$,$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的欧几里得内积为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_E=\sum_{i=0}^{n-1}a_ib_i$,厄米特内积为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_H=\sum_{i=0}^{n-1}a_ib_i^q$。

设 $C\subset F_{q^2}^n$,则 C 的欧几里得对偶码和厄米特对偶码分别为:

$$C^{\perp_E}=\{\boldsymbol{a}\in F_{q^2}^n\mid\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle_E=0,\quad\forall\boldsymbol{c}\in C\},$$

$$C^{\perp_H}=\{\boldsymbol{a}\in F_{q^2}^n\mid\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle_H=0,\quad\forall\boldsymbol{c}\in C\}。$$

称 C 为厄米特自正交码当且仅当 $C\subseteq C^{\perp_H}$。

定义 $C^q=\{\boldsymbol{c}^q=(c_0^q,c_1^q,\cdots,c_{n-1}^q)\mid(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})\in C\}$。

容易推出 $C^{\perp_H}=(C^q)^{\perp_E}=(C^{\perp_H})^q$。令 C 的非零点集为 $H\subseteq\{j\mid 0\leqslant j\leqslant n-1\}$,则 $C^{\perp_H}$ 仍然是循环码且有定义集 $-qH=\{-qh(\bmod n)\mid h\in H\}$。可以推出 C 为厄米特自正交码的充要条件是 $(-qH)\cap H=\varnothing$。

设 $V=\{v_0,v_1,\cdots,v_{m-1}\}$ 是 $F_{q^{2m}}$ 在 F_{q^2} 上的 1 组基,则对任意 $a_j\in F_{q^{2m}}$ 有 $a_j=\sum_{i=0}^{m-1}a_{ji}v_i$,其中 $a_{ji}\in F_{q^2}$,则 $F_{q^{2m}}^n$ 中,

$$\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})=$$

$$\Big(\sum_{i=0}^{m-1}a_{0i}v_i,\sum_{i=0}^{m-1}a_{1i}v_i,\cdots,\sum_{i=0}^{m-1}a_{n-1,i}v_i\Big)。$$

定义关于基 V 的映射 $L_V:F_{q^{2m}}^n\to F_{q^2}^{nm}$,

$$L_V(\boldsymbol{a})=(a_{00},\cdots,a_{n-1,0},a_{01},a_{11},\cdots,a_{n-1,m-1})。$$

定义参数为 $[n,k,d]_{q^{2m}}$ 的循环码 C 的像 $L_V(C)=\{L_V(\boldsymbol{a})\mid\boldsymbol{a}\in C\}$。容易推出 $L_V(C)$ 是参数为 $[mn,mk,\geqslant d]_{q^2}$ 的线性码。

设 $U=\{u_0,u_1,\cdots,u_{m-1}\}$ 是 $F_{q^{2m}}$ 的 1 组厄米特正交基,当 m 为奇数时,$L_V(C)^{\perp_H}=L_U(C^{\perp_H})$;当 m 为偶数时,$L_V(C)^{\perp_H}=L_U(C^{\perp_H})^{q}$[4]。假设码 C 的非零点集为 T_{2m},T_{2m} 是某些 q^{2m}-模 n 分圆陪集的集合。设 $D=\langle\prod_{t\in T_2}(x-\xi^t)\rangle$ 是长度为 n 的 q^2-元循环码,其中 $T_2=\bigcup_{C_{q^2}[k,n]\subseteq T_{2m}}C_{q^2}[k,n]$。若 $D\subseteq D^{\perp_H}$,则 $L_V(C)\subseteq L_V(C)^{\perp_H}$。因此,$-qT_2\cap T_2=\varnothing$ 当且仅当对任意 j、$i\in T_{2m}$,$t\in\mathbf{N}$,都有 $jq^{2t+1}+i\not\equiv 0(\bmod n)$。

3 量子纠错码的构造

3.1 构造 1

定理 2(Hermitian 构造)[12-13] 设 C 是长度为 n 的 q^2-元线性码,

$$d=\min\{wt(\boldsymbol{c})\mid \boldsymbol{c}\in C^{\perp_H}\backslash C\},$$

若 $C\subseteq C^{\perp_H}$,则存在参数为$[[n,n-2k,d]]_{q^2}$的量子纠错码。

设 $n=(q^{2m}-1)/(q+1)$,$m\geqslant 2$,则 q^{2m}-模 n 分圆陪集可以表示为 $C_{q^{2m}}[i,n]=\{i\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant n-1$。考虑 C 是长度为 n 的 q^{2m}-元循环 MDS 码。

设

$$\delta_1=\begin{cases}\dfrac{q^{m+1}-q^2}{q-1}, & m=2k\geqslant 2;\\[2mm] \dfrac{q^m-q}{q-1}, & m=2k+1\geqslant 3。\end{cases}$$

引理1 设 C 是长度为 $n=(q^{2m}-1)/(q-1)$ $(m\geqslant 2)$ 的 q^{2m}-元循环码,非零点集为 $T_{2m}=\bigcup_{i=1}^{u}C_{q^{2m}}[i,n]$。若 $1\leqslant u\leqslant\delta_1$,则 $L_V(C)\subseteq L_V(C)^{\perp_H}$。

证明 仅需证明对任意 j、$i\in T_{2m}$,$t\in\mathbf{N}$,都有 $jq^{2t+1}+i\not\equiv 0(\bmod n)$。

假设存在 j、$i\in T_{2m}$,$0\leqslant t\leqslant 2m-1$,使得 $jq^{2t+1}+i\equiv 0(\bmod n)$。注意到 $q^{4m}\equiv 1(\bmod q^{2m}-1)$,则 $j+iq^{2(2m-t-1)+1}\equiv 0(\bmod n)$。因此只需假设 $0\leqslant t\leqslant m-1$。下面分2种情况讨论。

(1) $m=2k\geqslant 2$ 的情况。

当 $0\leqslant t\leqslant(m-2)/2$ 时,

$$q+1\leqslant jq^{2t+1}+i\leqslant$$
$$\frac{q^{m+1}-q^2}{q-1}(q^{m-1}+1)=\frac{q^{2m}-q^2}{q-1}<n。$$

矛盾!

当 $\dfrac{m}{2}\leqslant t\leqslant m-1$,从 $jq^{2t+1}+i\equiv 0(\bmod n)$ 可得 $j+iq^{2(m-t)-1}\equiv 0(\bmod n)$,且有

$$q+1\leqslant j+iq^{2(m-t)-1}\leqslant\frac{q^{m+1}-q^2}{q-1}(q^{m-1}+1)。$$

矛盾!

(2) $m=2k+1\geqslant 3$ 的情况。

当 $0\leqslant t\leqslant(m-1)/2$ 时,

$$q+1\leqslant jq^{2t+1}+i\leqslant\frac{q^m-q}{q-1}(q^m+1)<n。$$

矛盾!

当 $0\leqslant t\leqslant(m-1)/2$ 时,

$$q+1\leqslant j+iq^{2(m-t)-1}\leqslant\frac{q^m-q}{q-1}(q^{m-2}+1)<n。$$

与假设矛盾!

定理3 当 $n=(q^{2m}-1)/(q-1)$,$m\geqslant 2$ 且 m 是正整数时,存在 q-元$[[mn,mn-2mu,\geqslant u+1]]$量子纠错码,其中 $1\leqslant u\leqslant\delta_1$。

证明 令 C 是长度为 n 的 q^{2m}-元循环码,非零点集 $T_{2m}=\bigcup_{i=1}^{u}C_{q^{2m}}[i,n]=\bigcup_{i=1}^{u}\{i\}$,$1\leqslant i\leqslant\delta_1$。由引理1知 $L_V(C)\subseteq L_V(C)^{\perp_H}$,可得零点集

$$Z_{2m}=\left(\bigcup_{i=u+1}^{n-1}\{i\}\right)\bigcup C_{q^{2m}}[0,n]。$$

显然零点集有 $n-u-1$ 个连续根 $\xi^{u+1},\cdots,\xi^{n-1}$,$\xi^n$,因此 C 是 $F_{q^{2m}}$ 上一个参数为$[n,u,n-u+1]$的 MDS 循环码。$C^{\perp_H}$ 也是一个 q^{2m}-元 MDS 循环码,且参数为$[n,n-u,u+1]$。容易看出,$L_V(C)^{\perp_H}$ 的距离 $d_1\geqslant u+1$。因为 $L_V(C)\subseteq L_V(C)^{\perp_H}$,所以可以推出 $L_V(C)$ 的参数为$[mn,mu,\geqslant u+1]_{q^2}$。由厄米特构造知,存在参数为$[[mn,mn-2mu,\geqslant u+1]]$的量子纠错码。

例1 令 $q=4$,$m=2$,$n=85$,根据定理3,存在长度为170的四元量子纠错码。通过使用文献[14]中的加长规则,得到长度为171的四元量子纠错码。得到的量子纠错码与文献[15]中已知量子码比较,有更高的码率或更大的最小距离。结果见表1所列。

表1 四元量子码的比较

新量子码	加长码	已知量子码[15]
$[[170,162,\geqslant 3]]_4$	$[[171,162,\geqslant 3]]_4$	$[[171,160,\geqslant 3]]_4$
$[[170,158,\geqslant 4]]_4$	$[[171,158,\geqslant 4]]_4$	$[[171,151,\geqslant 4]]_4$
$[[170,154,\geqslant 5]]_4$	$[[171,154,\geqslant 5]]_4$	$[[171,142,\geqslant 5]]_4$
$[[170,150,\geqslant 6]]_4$	$[[171,150,\geqslant 6]]_4$	$[[171,133,\geqslant 6]]_4$
$[[170,146,\geqslant 7]]_4$	$[[171,146,\geqslant 7]]_4$	$[[171,133,\geqslant 6]]_4$
$[[170,142,\geqslant 8]]_4$	$[[171,142,\geqslant 8]]_4$	$[[171,124,\geqslant 8]]_4$
$[[170,138,\geqslant 9]]_4$	$[[171,138,\geqslant 9]]_4$	$[[171,102,\geqslant 9]]_4$
$[[170,134,\geqslant 10]]_4$	$[[171,134,\geqslant 10]]_4$	$[[171,115,\geqslant 10]]_4$
$[[170,130,\geqslant 11]]_4$	$[[171,130,\geqslant 11]]_4$	$[[171,106,\geqslant 11]]_4$
$[[170,126,\geqslant 12]]_4$	$[[171,126,\geqslant 12]]_4$	$[[171,97,\geqslant 12]]_4$
$[[170,122,\geqslant 13]]_4$	$[[171,122,\geqslant 13]]_4$	$[[171,97,\geqslant 12]]_4$
$[[170,118,\geqslant 14]]_4$	$[[171,118,\geqslant 14]]_4$	$[[171,88,\geqslant 14]]_4$
$[[170,114,\geqslant 15]]_4$	$[[171,114,\geqslant 15]]_4$	$[[171,79,\geqslant 15]]_4$
$[[170,110,\geqslant 16]]_4$	$[[171,110,\geqslant 16]]_4$	$[[171,70,\geqslant 16]]_4$
$[[170,106,\geqslant 17]]_4$	$[[171,106,\geqslant 17]]_4$	$[[171,70,\geqslant 16]]_4$

3.2 构造2

考虑 C 是长度为 $n=(q^{2m}-1)/(q^2+1)$ 的 q^{2m}-元循环 MDS 码,$m\in\mathbf{N}$ 且 $m>2$ 为偶数。显然 q^{2m}-模 n 分圆陪集可以写为:

$$C_{q^{2m}}[i,n]=\{i\},\ 0\leqslant i\leqslant n-1。$$

设 $\delta_2=\dfrac{q^{2m}-1-(q^2+1)\Delta}{(q^2+1)(q^{m-1}+1)}$,

$$\Delta=\begin{cases}\lambda, & m=4k,\ k=1,2,3,\cdots;\\ q^{m-1}+\lambda+1, & m=4k+2,\ k=1,2,3,\cdots。\end{cases}$$

其中，$\lambda=\sum_{i=1}^{(m-2)/2}(-1)^{i+1}q^{2i}+\sum_{i=1}^{(m-2)/2}(-1)^{i+1}q^{2i-1}$。

引理 2　设 C 是长度为 $n=(q^{2m}-1)/(q^2+1)$ 的 q^{2m}-元循环 MDS 码，$m\in\mathbf{N}$ 且 $m>2$ 为偶数，C 的非零点集为 $T_{2m}=\bigcup_{i=1}^{u}C_{q^{2m}}[i,n]$。若 $1\leqslant u\leqslant\delta_2$，则 $L_V(C)\subseteq L_V(C)^{\perp_H}$。

证明　假设存在 j、$i\in T_{2m}$，$0\leqslant t\leqslant 2m-1$，使得 $jq^{2t+1}+i\equiv 0\pmod n$。两边同乘以 $q^{4m-2t-1}$，可得：

$$j+iq^{2(2m-t-1)+1}\equiv 0\pmod n。$$

因此可以假设 $0\leqslant t\leqslant m-1$。下面分 2 种情况讨论。

(1) $m=4k\geqslant 4$ 的情况。

当 $0\leqslant t\leqslant(m-2)/2$ 时，

$$q+1\leqslant jq^{2t+1}+i\leqslant \frac{q^{2m}-1-(q^2+1)\lambda}{(q^2+1)(q^{m-1}+1)}(q^{m-1}+1)<n。$$

矛盾！

当 $\frac{m}{2}\leqslant t\leqslant m-1$ 时，从 $jq^{2t+1}+i\equiv 0\pmod n$ 可得 $j+iq^{2(m-t)-1}\equiv 0\pmod n$，且有

$$q+1\leqslant j+iq^{2(m-t)-1}\leqslant \frac{q^{2m}-1-(q^2+1)\lambda}{(q^2+1)(q^{m-1}+1)}(q^{m-1}+1)<n。$$

矛盾！

(2) $m=4k+2\geqslant 6$ 的情况。

当 $0\leqslant t\leqslant(m-2)/2$ 时，

$$q+1\leqslant jq^{2t+1}+i\leqslant \frac{q^{2m}-1-(q^2+1)(q^{m-1}+\lambda+1)}{(q^2+1)(q^{m-1}+1)}(q^{m-1}+1)<n。$$

矛盾！

当 $\frac{m}{2}\leqslant t\leqslant m-1$ 时，从 $jq^{2t+1}+i\equiv 0\pmod n$ 可得 $j+iq^{2(m-t)-1}\equiv 0\pmod n$，且有

$$q+1\leqslant j+iq^{2(m-t)-1}\leqslant \frac{q^{2m}-1-(q^2+1)(q^{m-1}+\lambda+1)}{(q^2+1)(q^{m-1}+1)}(q^{m-1}+1)<n。$$

与假设矛盾！

定理 4　当 $n=(q^{2m}-1)/(q^2+1)$ 时，$m\in\mathbf{N}$ 且 $m>2$ 为偶数，$1\leqslant u\leqslant\delta_2$ 时，存在 q-元 $[[mn,mn-2mu,\geqslant u+1]]$ 量子纠错码。

例 2　令 $q=2$，$m=4$，$n=51$。根据定理 4，存在长度为 204 的二元量子纠错码。通过使用文献[14]中的加长规则，得到长度为 205 的二元量子纠错码。得到的量子纠错码与文献[15]中已知量子码比较，结果见表 2 所列。由表 2 可知，得到的量子纠错码有更高的码率。

表 2　二元量子码的比较

新量子码	加长码	已知量子码[15]
$[[204,188,\geqslant 3]]_2$	$[[205,188,\geqslant 3]]_2$	$[[205,185,\geqslant 3]]_2$
$[[204,180,\geqslant 4]]_2$	$[[205,180,\geqslant 4]]_2$	$[[205,161,\geqslant 4]]_2$
$[[204,172,\geqslant 5]]_2$	$[[205,172,\geqslant 5]]_2$	$[[205,165,\geqslant 5]]_2$

4　结　　论

本文用 MDS 循环码的厄米特自正交像构造新的量子码。这些新的量子码具有良好的纠错性能，与文献[15]中已知的量子码相比，这些新的量子码在长度相同时具有更大的最小距离或更高的码率。因此本文具有一定的理论与应用价值。

[参　考　文　献]

[1]　SHOR P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory[J]. Physical Review A, 1995, 52(4): 2493-2496.

[2]　STEANE A M. Multiple particle interference and quantum error correction[J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1996, 452(1): 2551-2577.

[3]　STEANE A M. Error correcting codes in quantum theory [J]. Physical Review Letters, 1996, 77(5): 793-797.

[4]　KAI X S, ZHU S X, LI P. Constacyclic codes and some new quantum MDS codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(4): 2080-2086.

[5]　JIN L, XING C. A construction of new quantum MDS codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(5): 2921-2925.

[6]　ALY S A, KLAPPENECKER A, SARVEPALLI O K. On quantum and classical BCH codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(3): 1183-1188.

[7]　LIN X Y. Quantum cyclic and constacyclic codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(3): 547-549.

[8]　THANGARAJ A, MCLAUGHIN S W. Quantum codes from cyclic codes over F_{4^m}[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(3): 1176-1178.

[9]　SEGUIN G E. The q-ary image of a q^m-ary cyclic code [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(2): 387-399.

[10]　SUNDEEP B, THANGARAJ A. Self-orthogonality of q-ary images of q^m-ary codes and quantum code construction [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(7): 2480-2489.

[11]　MACWILLIAMS F J, SLOANE N J A. The theory of error-correcting codes [M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1981: 201-202.

[12]　CALDERBANK A R, RAINDS E M, SHOR P M, et al. Quantum error correction via codes over F_4 [J]. IEEE

Transactions on Information Theory，1998，44（4）：1369-1389.

［13］ ASHIKHMIN A R，KNILL E. Nonbinary quantum stablizer codes［J］. IEEE Transactions on Information Theory，2001，47(7)：3065-3072.

［14］ FENG K Q，LING S，XING C P. Asymptotic bounds on quantum codes from algebraic geometry codes［J］. IEEE Transactions on Information Theory，2006，52（3）：986-991.

［15］ EDEL Y. Some good quantum twisted codes［EB/OL］. (2022-07-10). https://www. mathi. uni-heidelberg. de/～yves/Matritzen/QTBCH/QTBCHIndex. html.

（责任编辑 朱晓临）

(上接第658页)

运营初始3 a内引起的沉降较大，第3年时达到19.58 mm；运行3～5 a土体沉降速率减小，最后基本趋于稳定；曲率半径为350 m下，到达设计年限30 a时，沉降稳定于20.23 mm。根据本文研究结果，并考虑规范中的沉降控制值[21] 25 mm，综合考虑曲率半径和列车速度的影响，当曲率半径为250～350 m时，列车速度宜控制在80 km/h以下，而当曲线隧道曲率半径大于350 m时，列车速度可适当调高。

［参 考 文 献］

［1］ 丁智，张涛，魏新江，等. 排水条件对不同固结度软黏土动力特性影响试验研究［J］. 岩土工程学报，2015，37（5）：893-899.

［2］ 唐益群，赵化，王元东，等. 地铁荷载下隧道周围加固软黏土应变累积特性［J］. 同济大学学报（自然科学版），2011，39(7)：972-977.

［3］ 闫春岭，唐益群，刘莎. 地铁荷载下饱和软黏土累积变形特性［J］. 同济大学学报(自然科学版)，2011，39(7)：978-982.

［4］ 杨兵明，刘保国. 地铁列车循环荷载下软土地区盾构隧道长期沉降分析［J］. 中国铁道科学，2016，37(3)：61-67.

［5］ HUANG M S，YAO Z M. Effect of the principal stress direction on cyclic cumulative deformation and pore pressure of soft clay［J］. Procedia Engineering，2016，143：811-819.

［6］ 王鑫，韩煊，周宏磊. 黄土地区地铁行车荷载作用下地表响应的数值计算研究［J］. 现代隧道技术，2014，51（3）：152-160.

［7］ 梅慧浩. 循环-间歇加载下粉土永久变形特性试验［J］. 土木工程与管理学报，2021，38(2)：160-167，173.

［8］ 马龙祥，靳永福，张超，等. 黏土与粉土复合地层及其中地铁隧道的车致长期沉降［J］. 西南交通大学学报，2022，57(5)：1103-1112.

［9］ 何绍衡，刘志军，夏唐代，等. 长期循环荷载下珊瑚砂累积变形特性试验研究［J］. 岩土工程学报，2019，41（增刊2）：161-164.

［10］ 陈成，周正明，张先伟. 长期循环荷载作用下泥炭质土累积变形简化计算方法研究［J］. 振动与冲击，2019，38(14)：276-282.

［11］ 胡翔翔. 地铁列车荷载下土石混合体回填土动力特性试验研究［D］. 重庆：重庆大学，2019.

［12］ ZHANG Y G，ZHENG Y L，HAN S，et al. Experimental study on deformation of heavy metal contaminated expansive soil under cyclic loading［J］. IOP Conference Series：Earth and Environmental Science，2019，237(2)：022026.

［13］ 丁智，范俊靓，张孟雅，等. 地铁列车荷载下原状土孔压及应变模型试验研究［J］. 铁道学报，2017，39(3)：96-103.

［14］ 韩丽君. 复杂应力状态下饱和砂土的动力特性研究［D］. 西安：长安大学，2019.

［15］ SUN Y，XIAO Y，HANIF K F. Fractional order modelling of the cumulative deformation of granular soils under cyclic loading［J］. Acta Mechanica Solida Sinica，2015，28（6）：647-658.

［16］ 吴迪，蒋敏敏，肖昭然. 小半径曲线盾构施工对周边土体位移的影响［J］. 辽宁工程技术大学学报（自然科学版），2021，40(4)：318-326.

［17］ 肖昭然，王永刚，张文萃，等. 粉砂地层中列车载荷对曲线隧道沉降的影响［J］. 辽宁工程技术大学学报（自然科学版），2021，40(4)：327-332.

［18］ 姚兆明，黄茂松，张宏博. 长期循环荷载下粉细砂的累积变形特性［J］. 同济大学学报（自然科学版），2011，39（2）：204-208.

［19］ 王涛，施斌，马龙祥，等. 粉细砂地层对地铁列车荷载的动力响应及长期变形研究［J］. 工程地质学报，2020，28(6)：1378-1385.

［20］ 魏新江，张孟雅，丁智，等. 初始固结度影响下地铁运营引起的长期沉降预测［J］. 现代隧道技术，2016，53（2）：114-120.

［21］ 北京城建勘测设计研究院有限责任公司. 城市轨道交通工程监测技术规范：GB 50911—2013［S］. 北京：中国建筑工业出版社，2013：51-58.

（责任编辑 张淑艳）