

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2023.03.022

扇图的 Terwilliger 代数

谭莹莹, 张雅雯, 夏田田, 梁晓晔

(安徽建筑大学 数理学院, 安徽 合肥 230601)

摘要: Terwilliger 代数是刻画距离正则图的局部结构的重要工具, 但利用 Terwilliger 代数刻画一般图的结构的研究较少。文章研究扇图的 Terwilliger 代数。首先证明了 Terwilliger 代数在图的自同构群的作用下保持同构, 并给出扇图的自同构群; 其次完全刻画了其关于任意基本点的 Terwilliger 代数的不可约模的结构; 最后得到扇图的 Terwilliger 代数与其自同构群的点稳定化子的中心化子代数同构的充要条件。

关键词: Terwilliger 代数; 扇图; 中心化子代数; 不可约模

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1003-5060(2023)03-0419-07

Terwilliger algebras of a fan graph

TAN Yingying, ZHANG Yawen, XIA Tiantian, LIANG Xiaoye

(School of Mathematics and Physics, Anhui Jianzhu University, Hefei 230601, China)

Abstract: Terwilliger algebra is an important tool for characterizing the local structure of distance-regular graphs, but there are few researches on characterizing the structure of general graphs by the Terwilliger algebra. In this paper, the Terwilliger algebras of a fan graph is studied. Firstly, it is proved that Terwilliger algebras keep isomorphism under the action of automorphism group on graph and the automorphism group of the fan graph is given. Secondly, the structure of irreducible modules for each of Terwilliger algebras of the fan graphs is determined. As a result, a necessary and sufficient condition for the isomorphism between the Terwilliger algebra for a fixed vertex and the centralizer algebra of stabilizer of the automorphism group of the fan graph is obtained.

Key words: Terwilliger algebra; fan graph; centralizer algebra; irreducible module

0 引 言

结合方案是代数组组合学的核心概念之一, 与数学的很多分支(如组合设计、编码、图论等), 都有着紧密联系。文献[1]定义了一类特殊的结合方案—— P -和 Q -多项式结合方案; 文献[2]提出了 P -和 Q -多项式结合方案分类问题, 后来发展为代数组组合学的核心问题之一; 文献[3-5]提出了研究该问题的重要工具次成分代数(称为 Terwilliger 代数或 T-代数), 这给 P -和 Q -多项式结合方案的研究提供了强大的代数工具; 文献[6]定义了

图的 Terwilliger 代数, 并具体刻画了距离正则图的 Terwilliger 代数表示理论, 即 Terwilliger 代数的不可约模。之后, 距离正则图的 Terwilliger 代数刻画受到了国内外学者的广泛关注; 文献[7]对 Hamming 图的 Terwilliger 代数展开研究, 证明了其 Terwilliger 代数同构于自同构群的点稳定化子的中心化子代数; 文献[8]对 Johnson 图的 Terwilliger 代数进行探讨, 给出了其 Terwilliger 代数与自同构群的点稳定化子的中心化子代数同构的条件; 文献[9-10]研究了更为一般的图类——树的 Terwilliger 代数, 分别给出了树的

收稿日期: 2022-05-12; 修回日期: 2022-11-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11801007; 12201008); 安徽省教育厅高校研究生科学研究资助项目(YJS20210510)

作者简介: 谭莹莹(1979—), 女, 安徽阜阳人, 博士, 安徽建筑大学教授, 博士生导师;

梁晓晔(1992—), 女, 安徽合肥人, 博士, 安徽建筑大学讲师, 通信作者, E-mail: liangxy0105@sina.com.

Terwilliger 代数主子模的结构及树的 Terwilliger 代数与自同构群的点稳定化子的中心化子代数同构的充要条件。因此,寻找更多的图类,使其 Terwilliger 代数与自同构群的点稳定化子的中心化子代数同构,或给出两者同构的充要条件,具有重要的理论意义。

本文研究一类简单图——扇图,探索其 Terwilliger 代数与其局部结构的联系,完全刻画了扇图的 Terwilliger 代数,给出扇图的 Terwilliger 代数与关于其自同构群的稳定化子的中心化子代数同构的充要条件。

1 预备知识

本文所考虑的图都是简单图,即无环无重边的图。设图 $\Gamma=(X, E)$ 的顶点集为 $X:=X(\Gamma)$, 边集为 $E:=E(\Gamma)$ 。图 Γ 的子图 $\Gamma'=(X', E')$ 是满足 $X' \subseteq X$ 且 $E' \subseteq E$ 的图。设 X' 为图 Γ 的非空顶点子集, Γ 关于顶点子集 X' 的诱导子图是以 X' 为顶点集, 以 Γ 中两 endpoint 均在 X' 中的边构成边集的子图, 记为 $\Gamma[X']$ 。以 n 个不同顶点 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为顶点集, $\{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$ 为边集的子图称为由顶点 x_1 到顶点 x_n 的一条路, 记为 $P_n: x_1, x_2, \dots, x_n$ 或简记为 P_n 。顶点 x_i 和 x_j 的距离是指连接两者的最短路的边数, 记为 $\partial(x_i, x_j)$ 。设 $d(x_i)$ 为顶点 x_i 的度, 即图 Γ 中与 x_i 邻接的顶点数。若图 Γ 中任何不同顶点对都是邻接的, 则称 Γ 为完全图, 具有 n 个顶点的完全图记为 K_n 。若图 $\Gamma_1=(X_1, E_1)$ 和图 $\Gamma_2=(X_2, E_2)$ 顶点不相交, 则两者的并为图 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2=(X_1 \cup X_2, E_1 \cup E_2)$ 。

定义 1^[11] 若图 Γ 是将路 $P_n: x_1, x_2, \dots, x_n$ 外一点 x_0 与路 P_n 中的每一个顶点 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 连接所得, 则称 Γ 为扇图, 记为 F_{n+1} , 如图 1 所示。

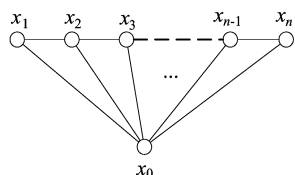


图 1 扇图 F_{n+1}

定义 2^[12] 设 $\Gamma_1=(X_1, E_1)$ 和 $\Gamma_2=(X_2, E_2)$ 是 2 个简单图。若存在一个双射 $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$, 满足对任意 $x_i, x_j \in X_1, (x_i, x_j) \in E_1$ 当且仅当

$(\varphi(x_i), \varphi(x_j)) \in E_2$, 则称 φ 是图 Γ_1 到图 Γ_2 的同构映射。若存在图 Γ_1 到图 Γ_2 的同构映射, 则称图 Γ_1 与图 Γ_2 同构, 记为 $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ 。图 $\Gamma=(X, E)$ 到其自身的同构映射称为自同构映射, 简称为图 Γ 的自同构。图 Γ 的所有自同构关于映射的合成运算构成群, 称为图 Γ 的自同构群, 记为 $G = \text{Aut}(\Gamma)$ 。记 x_i 在映射 $g \in G$ 下的像为 x_i^g, x_i 在群 G 作用下的轨道为 $\text{Orb}(G, x_i) = \{x_j \in X | x_j = x_i^g, g \in G\}$, 记 $\text{Orb}(G, X)$ 为 X 中所有顶点在群 G 作用下的轨道集。

定义 3^[12] 设 G 是图 Γ 的自同构群, X 是图 Γ 的顶点集。对任意 $x_i \in X$, 称 $H^{(x_i)} = \{g \in G | x_i^g = x_i\}$ 为图 Γ 的自同构群关于顶点 x_i 的稳定化子。

设 Γ 是一个简单图, X 为图 Γ 的顶点集。复数域 \mathbf{C} 上的全矩阵代数 $\text{Mat}_X(\mathbf{C})$ 为 \mathbf{C} 上所有 $|X|$ 阶矩阵构成的 \mathbf{C} -代数。设 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 记 $\hat{x}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, 其中 1 在指标 $i+1 (0 \leq i \leq n)$ 处, T 表示向量的转置。将所有形式为 $\sum_{x_i \in X} c_i \hat{x}_i (c_i \in \mathbf{C})$ 的集合记为 V 。在 V 上定义 Hermitian 内积: $(u, v) = u^T \bar{v}$, 其中 \bar{v} 表示向量 v 的共轭, 故 V 是以 $\{\hat{x}_i | x_i \in X\}$ 为一组标准正交基张成的向量空间。 $\text{Mat}_X(\mathbf{C})$ 通过左乘的方式作用于向量空间 V 上, 即任意 $M \in \text{Mat}_X(\mathbf{C}), v \in V$, 矩阵 M 将向量 v 映到 $Mv \in V$, 称 V 为 $\text{Mat}_X(\mathbf{C})$ 的标准模。注意到, X 中的顶点 x_i 与向量 \hat{x}_i 是一一对应的, 故也可以说向量空间 V 由 X 张成。任意一个群 G 都可由一般线性群 $GL(V)$ 表示, 即存在同态映射 $\mathcal{A}: G \rightarrow GL(V)$, 使得 $g \in G$ 映到 V 上的线性变换。在不引起混淆的情况下, 用矩阵 B 来表示线性变换 $\mathcal{A}(g)$ 。实际上, B 也可看作群 G 中元素 g 的矩阵表示。由此可知, 自同构群 G 在顶点集 X 上的作用 x_i^g 等价于 G 在 V 上的作用 $B\hat{x}_i$ 。

固定 $x_r \in X$ 作为基本点, 则根据 X 中顶点和基本点的距离, 可将 X 划分为 $X = \bigcup_{l=0}^{D(x_r)} X_l(x_r)$, 其中: $X_l(x_r) = \{x \in X | \partial(x, x_r) = l\}$; $D(x_r) = \max\{\partial(x, x_r) | x \in X\}$ 。因而 X 的划分 $X = \bigcup_{l=0}^{D(x_r)} X_l(x_r)$ 给出向量空间 V 的一个正交分解: $V = \bigoplus_{l=0}^{D(x_r)} V_l^*(x_r)$, 其中 $V_l^*(x_r)$ 是由 $X_l(x_r)$ 张成的向量空间。

定义 4 $A=(a_{ij})$ 为图 Γ 的邻接矩阵, 即若图 Γ

中顶点 x_i 和 x_j 邻接, $a_{ij} = 1$; 否则等于 0。设 $E_l^*(x_r)$ ($0 \leq l \leq D(x_r)$) 是空间 V 到空间 $V_l^*(x_r)$ 的正交投影矩阵, 则由 A 和 $E_0^*(x_r), E_1^*(x_r), \dots, E_{D(x_r)}^*(x_r)$ 为基生成的矩阵代数, 称为图 Γ 关于基本点 x_r 的 Terwilliger 代数^[13], 记为:

$$T = T(x_r) = \langle A, E_l^*(x_r) \mid 0 \leq l \leq D(x_r) \rangle.$$

因为 $T \subseteq \text{Mat}_X(\mathbf{C})$, 所以 $\text{Mat}_X(\mathbf{C})$ 的标准模 V 也可看作 T 的标准模。设 $x_r, x_l \in X$, 若 $D(x_r) = D(x_l)$ 且对任意 $0 \leq l \leq D(x_r)$, 空间 $V_l^*(x_r)$ 与空间 $V_l^*(x_l)$ 同构, 即 $E_l^*(x_r)$ 与 $E_l^*(x_l)$ 一一对应, 则称图 Γ 关于基本点 x_r 与基本点 x_l 的 Terwilliger 代数同构^[10], 记为 $T(x_r) \simeq T(x_l)$ 。设 $H^{(x_r)}$ 是图 Γ 自同构群关于顶点 x_r 的稳定化子, 称 $\text{Mat}_X(\mathbf{C})$ 的标准模 V 上由所有与 $H^{(x_r)}$ 的作用可交换的线性变换构成的集合 S 为 $H^{(x_r)}$ 的中心化子代数^[13], 即

$$S = \text{Hom}_{H^{(x_r)}}(V, V) = \{f: V \rightarrow V \mid fh = hf, \forall h \in H^{(x_r)}\}.$$

定义 4^[13] 设 T 为图 Γ 关于基本点 x_r 的 Terwilliger 代数, V 是 T 的标准模。设 $W \subseteq V$, 若 $TW \subseteq W$, 即 W 是 T -不变子空间, 则称 W 为 T -子模。若 W 中除了 W 与零模外不包含其他 T -子模, 则称 W 是不可约 T -模。

引理 1^[14] 设 $\Gamma[X']$ 、 $\Gamma[X'']$ 分别是图 Γ 关于顶点集 X', X'' 的诱导子图, 若存在图 Γ 的自同构 g , 使得对任意 $x_r \in X'$, 有 $x_r^g \in X''$ 成立, 则 $\Gamma[X'] \simeq \Gamma[X'']$ 。

引理 2^[14] 设图 $\Gamma = (X, E)$, $x_i, x_j \in X$, g 是图 Γ 的自同构, 则

- (1) 顶点的度与其在自同构 g 下像的度相等, 即 $d(x_i) = d(x_i^g)$ 。
- (2) 任意不同顶点对的距离与其在自同构 g 下像对的距离相等, 即 $\partial(x_i, x_j) = \partial(x_i^g, x_j^g)$ 。

引理 3^[9] 设 $H^{(x_r)}$ 是图 Γ 自同构群关于顶点 x_r 的稳定化子, S 是稳定化子 $H^{(x_r)}$ 的中心化子代数, 则 $S\hat{x}_r = \text{span}\{\underline{Y} \mid Y \in \text{Orb}(H^{(x_r)}, X)\}$, 其中, $\underline{Y} = \sum_{y \in Y} \hat{y} \in V$ 。

2 扇图的不可约 T -模的结构

首先证明图的 Terwilliger 代数在其自同构群的作用下作为 \mathbf{C} -代数保持同构。

命题 1 设 g 是图 $\Gamma = (X, E)$ 的自同构, 任取 $x_r \in X$, $T(x_r)$ 是图 Γ 关于基本点 x_r 的 Terwil-

liger 代数, 则 $T(x_r) \simeq T(x_r^g)$ 。

证明 设 $\Gamma_l(x_r)$ 是图 Γ 中所有与顶点 x_r 的距离为 l 的顶点集诱导的子图, 即

$$X(\Gamma_l(x_r)) = \{x \in X \mid \partial(x, x_r) = l\}.$$

由自同构的定义与引理 1 可知:

$$\Gamma_l(x_r) \simeq (\Gamma_l(x_r))^g \simeq \Gamma_l(x_r^g) \quad (1)$$

即 $\Gamma_l(x_r)$ 与 $\Gamma_l(x_r^g)$ 是图 Γ 的 2 个同构子图。

固定 $x_r \in X$, 由图的 Terwilliger 代数的定义可知:

$$T(x_r) = \langle A, E_l^*(x_r) \mid 0 \leq l \leq D(x_r) \rangle,$$

其中: $D(x_r) = \max\{\partial(x, x_r) \mid x \in X\}$; $E_l^*(x_r)$ 是空间 V 到空间 $V_l^*(x_r)$ 的正交投影矩阵。由引理 2 (2) 可知, $D(x_r) = D(x_r^g)$, 且由 (1) 式可得自同构 g 为 $X(\Gamma_l(x_r))$ 与 $X(\Gamma_l(x_r^g))$ 的置换, 故 $E_l^*(x_r)$ 与 $E_l^*(x_r^g)$ 一一对应, 则

$$T(x_r^g) = \langle A, E_l^*(x_r^g) \mid 0 \leq l \leq D(x_r^g) \rangle \simeq \langle A, E_l^*(x_r) \mid 0 \leq l \leq D(x_r) \rangle = T(x_r).$$

下面对图的 Terwilliger 代数与其自同构群的点稳定化子的中心化子代数的关系进行论述。

命题 2 设 $H^{(x_r)}$ 是图 Γ 的自同构群 G 关于顶点 x_r 的稳定化子, S 为 $H^{(x_r)}$ 的中心化子代数, $T = T(x_r)$ 是图 Γ 关于基本点 x_r 的 Terwilliger 代数, 则 $T \subseteq S$ 。

证明 由图的 Terwilliger 代数的定义可知, $A, E_0^*(x_r), E_1^*(x_r), \dots, E_{D(x_r)}^*(x_r)$ 为 $T(x_r)$ 的一组基。对任意 $v \in V, h \in H^{(x_r)}$, 稳定化子在 T 的标准模 V 上的作用为 Bv , 其中 B 为映射 h 的矩阵表示。由自同构群的点稳定化子的中心化子代数 S 的定义可得: 要证 $T \subseteq S$, 只需证明 T 与 $H^{(x_r)}$ 的作用可交换, 即

$$ABv = BA v \text{ 且 } BE_l^* v = E_l^* Bv,$$

其中: $v \in V; E_l^* := E_l^*(x_r), 0 \leq l \leq D(x_r)$ 。

由点稳定化子的定义可知, $H^{(x_r)}$ 是图的自同构群 G 的子群。易知, 自同构群中元素的矩阵表示与其邻接矩阵 A 可交换, 因此对任意 $v \in V, h \in H^{(x_r)}, ABv = BA v$ 成立。

设 $x_i^h = x_j$, 记 $v = \sum_{x_i \in X} c_i \hat{x}_i$, 其中 $c_i \in \mathbf{C}$, 则

$$\begin{cases} BE_l^* v = B \left(\sum_{\partial(x_i, x_r)=l} c_i \hat{x}_i \right) = \sum_{\partial(x_j, x_r)=l} c_j \hat{x}_j, \\ E_l^* Bv = E_l^* \left(\sum_{j=0}^n c_j \hat{x}_j \right) = \sum_{\partial(x_j, x_r)=l} c_j \hat{x}_j. \end{cases}$$

故 $BE_l^* v = E_l^* Bv$ 成立。

综上, 命题成立, 即 $T \subseteq S$ 。

下面利用顶点与其在自同构映射下的像满足

的性质,刻画扇图 F_{n+1} 的自同构群。在以下的论述中,用图 Γ 表示扇图 F_{n+1} 。

命题 3 扇图 Γ 的自同构群 G 仅有置换 $f =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots \\ 0 & n & n-1 & \cdots & n-i+1 & \cdots \end{pmatrix} \text{和恒等置换 } e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ 2 个元素。}$$

证明 由图 1 可知,图 Γ 各顶点的度为:

$$d(x_i) = \begin{cases} n, & i = 0; \\ 2, & i = 1 \text{ 或 } i = n; \\ 3, & 2 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (2)$$

任取 $g \in G$,由引理 2 和(2)式可知, $x_0^g = x_0$, $x_1^g = x_1$ 且 $x_n^g = x_n$,或 $x_1^g = x_n$ 且 $x_n^g = x_1$ 。

首先证明 $e, f \in G$ 。由引理 2 知,对于顶点 $x_i (2 \leq i \leq n-1)$,可建立如下方程组:

$$\begin{cases} d(x_i^g) = d(x_i), \\ \partial(x_0^g, x_i^g) = \partial(x_0, x_i), \\ \partial(x_1^g, x_i^g) = \partial(x_1, x_i), \\ \vdots \\ \partial(x_{i-1}^g, x_i^g) = \partial(x_{i-1}, x_i) \end{cases} \quad (3)$$

结合方程组(3),由图 Γ 中各顶点之间的距离关系可知:

$$g = f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots \\ 0 & n & n-1 & \cdots & n-i+1 & \cdots \end{pmatrix} \text{ 或 } g = e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}。$$

其次证明 G 中除了 f 和 e 之外,没有其他元素。固定顶点 $x_i (2 \leq i \leq n-1)$,将扇图中的顶点按与 x_i 的距离为 0、1 和 2 重新作图 Γ ,如图 2 所示。

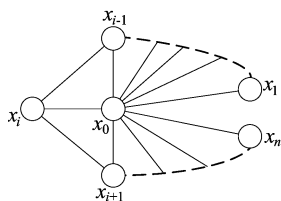


图 2 扇图 Γ

设图 $\Gamma_l(x_i) (0 \leq l \leq D(x_i))$ 是图 Γ 关于顶点集 $X(\Gamma_l(x_i)) = \{x \in X(\Gamma) \mid \partial(x, x_i) = l\}$ 的诱导子图。由图 2 可知, $D(x_i) = 2$, $\Gamma_0(x_i)$ 是顶点 x_i ; $\Gamma_1(x_i)$ 是一条长度为 3 的路,即 $\Gamma_1(x_i) = P_3$; $\Gamma_2(x_i) = P_{i-1} \cup P_{n-i}$ 。假设存在 w 是 G 中不同于 e 和 f 的元素,即存在 j ,满足 $2 \leq k \neq j \neq n-j+1$

$1 \leq n-1$,使得 $x_k^w = x_j$ 成立。由(1)式可知, $\Gamma_2(x_k) \cong \Gamma_2(x_j)$,故有 $k-1=j-1$ 或 $k-1=n-j$ 。解得 $k=j$ 或 $k=n-j+1$,这与假设矛盾。

设 Γ 是顶点为 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 的扇图, $T = T(x_r)$ 为图 Γ 关于基本点 $x_r (0 \leq r \leq n)$ 的 Terwilliger 代数, V 是 T 的标准模, $W_0^{(x_r)}$ 为 V 中包含基本点 x_r 的最小 T -子模,即 $W_0^{(x_r)} = T\hat{x}_r$ 。 V 的一组标准正交基为 $\{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$,邻接矩阵 A 的 $s (\geq 1)$ 次方 A^s 作用到 \hat{x}_r 上,可由这组基线性表示,即

$$A^s \hat{x}_r = a^s(0)\hat{x}_0 + a^s(1)\hat{x}_1 + \cdots + a^s(n)\hat{x}_n,$$

其中, $a^s(i) (0 \leq i \leq n)$ 是 A^s 在基 $\{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$ 下的坐标。

由图 2 中各顶点之间的距离关系可得:

$$a^{s+1}(i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a^s(i), & i = 0; \\ a^s(0) + a^s(2), & i = 1; \\ a^s(i-1) + a^s(0) + a^s(i+1), & 2 \leq i \leq n-1; \\ a^s(0) + a^s(i-1), & i = n \end{cases} \quad (4)$$

注意到,(4)式中,当 $2 \leq i-(s-4)$ 且 $i+(s-4) \leq n-1$ 时, $a^s(i)$ 有如下表达式:

$$a^s(i) = \sum_{k=0}^{s-3} C_{s-3}^k a^3(i-(s-3)+2k) + \sum_{w=0}^{s-4} \sum_{k=0}^w C_w^k a^{s-w-1}(0) \quad (5)$$

其中, C_{s-3}^k 表示二项式系数。

因为扇图 Γ 是将路 P_n 外一点 x_0 与路中的每一个顶点 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 连接所得,所以在下述刻画 V 中包含基本点 $x_r (0 \leq r \leq n)$ 的最小 T -子模 $W_0^{(x_r)}$ 时,按照 $r=0$ 与 $1 \leq r \leq n$ 进行分类讨论,有如下结论。

定理 1 设 x_0 是图 1 中的扇图 Γ 中的顶点,则

$$W_0^{(x_0)} = \text{span}\{\hat{x}_0, \hat{x}_p + \hat{x}_{n-p+1} \mid 1 \leq p \leq k\},$$

其中, $k = \lceil n/2 \rceil$ 。

证明 由命题 3 可知,当基本点为 x_0 时,图 Γ 自同构群关于顶点 x_0 的稳定化子 $H^{(x_0)}$ 与图 Γ 的自同构群 G 相等,因此有:

$$\{\underline{Y} \mid Y \in \text{Orb}(H^{(x_0)}, X)\} =$$

$$\{\underline{Y}_0 = \hat{x}_0, \underline{Y}_p = \hat{x}_p + \hat{x}_{n-p+1} \mid 1 \leq p \leq k\},$$

其中, $k = \lceil n/2 \rceil$ 。

一方面,由命题 2 和引理 3 可得:

$$W_0^{(x_0)} = T\hat{x}_0 \subseteq S\hat{x}_0 = \text{span}\{\underline{Y} \mid Y \in$$

$$\text{Orb}(H^{(x_0)}, X)\}.$$

另一方面,通过分析图 Γ 中各顶点的邻接关系,可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 &= \sum_{p=1}^n \hat{\mathbf{x}}_p, \\ \mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}_0 &= n\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_1 + 2(\hat{\mathbf{x}}_2 + \cdots + \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) + \hat{\mathbf{x}}_n \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_2; \\ \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \hat{\mathbf{x}}_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1; \\ \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_{n-1} \end{cases} \quad (7)$$

因此,结合(6)式,由矩阵 $\mathbf{E}_l^*(x_0)$ ($0 \leq l \leq D^{(x_0)}$) 的定义和方程组(7)可得, $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k$ 之间具有如下关系:

$$\mathbf{Y}_1 = \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_n = 2\mathbf{A}\mathbf{Y}_0 - \mathbf{E}_1^*(x_0)\mathbf{A}^2\mathbf{Y}_0;$$

$$\mathbf{Y}_2 = \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_{n-1} = \mathbf{E}_1^*(x_0)\mathbf{A}\mathbf{Y}_1;$$

$$\mathbf{Y}_p = \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{n-p+1} =$$

$$\mathbf{E}_1^*(x_0)\mathbf{A}\mathbf{Y}_{p-1} - \mathbf{Y}_{p-2}, \quad 3 \leq p \leq k.$$

因此,要证 $\text{span}\{\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{n-p+1} \mid 1 \leq p \leq k\} \subseteq W_0^{(x_0)}$, 只需证对任意 $0 \leq p \leq k, \mathbf{Y}_p \in W_0^{(x_0)}$ 以及 $\mathbf{Y}_0 \in T\hat{\mathbf{x}}_0 = W_0^{(x_0)}$. 由(6)式可得:

$$\mathbf{Y}_0 = \frac{1}{n}\mathbf{E}_0^*(x_0)\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}_0 \in T\hat{\mathbf{x}}_0 = W_0^{(x_0)}.$$

推论 1 设 x_0 是图 1 中的扇图 Γ 的顶点,则 T 的标准模 V 可分解为 2 个相互正交的 T -不变子空间的直和,即 $V = W_0^{(x_0)} \oplus W_1^{(x_0)}$, 其中 $k = \lceil n/2 \rceil, W_0^{(x_0)} = \text{span}\{\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{n-p+1} \mid 1 \leq p \leq k\}, W_1^{(x_0)} = \text{span}\{\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_{n-p+1} \mid 1 \leq p \leq k\}$.

证明 对任意 $\alpha \in W_0^{(x_0)}$, 由不变子空间的定义,有 $T\alpha \in W_0^{(x_0)}$. 由图的 Terwilliger 代数的定义 $T = T(x_r) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{E}_l^*(x_r) \mid 0 \leq l \leq D^{(x_r)} \rangle$ 可知, T 在共轭转置下封闭. 于是,任取 $\beta \in W_1^{(x_0)}$, 有

$$(T\beta, \alpha) = (\beta, T\alpha) = 0.$$

故 $T\beta \in W_1^{(x_0)}$, 即 $W_0^{(x_0)}$ 的正交补空间 $W_1^{(x_0)}$ 也是 T -不变子空间. 此外,通过计算可得:

$$W_1^{(x_0)} = \text{span}\{\hat{\mathbf{x}}_p - \hat{\mathbf{x}}_{n-p+1} \mid 1 \leq p \leq k\}.$$

定理 2 设 x_r ($1 \leq r \leq n$) 是图 1 中的扇图 Γ 中的顶点,则以下结论成立.

(1) 若 n 为奇数且 $r = (n+1)/2$, 则

$$W_0^{(x_r)} = \text{span}\{\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{2r-p} \mid 1 \leq p \leq r\}.$$

(2) 若 n 为偶数或 n 为奇数且 $r \neq (n+1)/2$, 则 $W_0^{(x_r)} = V$.

证明 (1) 图 Γ 自同构群关于顶点 x_r 的稳定化子 $H^{(x_r)}$ 与图 Γ 的自同构群 G 相等, 即

$$\begin{aligned} \{\mathbf{Y} \mid \mathbf{Y} \in \text{Orb}(H^{(x_r)}, X)\} = \\ \{\mathbf{Y}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{Y}_p = \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{n-p+1} \mid 1 \leq p \leq k\} \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $k = \lceil n/2 \rceil$. 将 $r = (n+1)/2$ 代入(8)式, (8)式可改写为:

$$\{\mathbf{Y} \mid \mathbf{Y} \in \text{Orb}(H^{(x_r)}, X)\} =$$

$$\{\mathbf{Y}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{Y}_r = \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{2r-p} \mid 1 \leq p \leq r\}.$$

一方面,由命题 2 和引理 3 可得:

$$W_0^{(x_r)} \subseteq \text{span}\{\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{2r-p} \mid 1 \leq p \leq r\}.$$

另一方面,通过分析图 Γ 中各顶点的邻接关系可得:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_r = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_1,$$

$$\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}_r = 2\mathbf{Y}_0 + \sum_{p=1}^{r-3} \mathbf{Y}_p + 2\mathbf{Y}_{r-2} + \mathbf{Y}_{r-1} + \frac{3}{2}\mathbf{Y}_r \quad (9)$$

因此,结合(9)式,由矩阵 $\mathbf{E}_l^*(x_r)$ ($0 \leq l \leq D^{(x_r)}$) 的定义和方程组(7)可得, $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_r$ 之间具有如下关系:

$$\mathbf{Y}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^*(x_r)\mathbf{A}^2\mathbf{Y}_r - \mathbf{A}\mathbf{Y}_r),$$

$$\mathbf{Y}_{r-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{Y}_r - \mathbf{E}_1^*(x_r)\mathbf{A}^2\mathbf{Y}_r,$$

$$\mathbf{Y}_p = \begin{cases} \mathbf{E}_2^*(x_r)\mathbf{A}\mathbf{Y}_{p+1}, & p = r-2 \text{ 或 } p = r-3; \\ \mathbf{E}_2^*(x_r)\mathbf{A}\mathbf{Y}_{p+1} - \mathbf{Y}_{p+2}, & 1 \leq p \leq r-4. \end{cases}$$

因此,要证 $\text{span}\{\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{2r-p} \mid 1 \leq p \leq r\} \subseteq W_0^{(x_r)}$, 只需证对任意 $0 \leq p \leq r, \mathbf{Y}_p \in W_0^{(x_r)}$ 以及 $\mathbf{Y}_r \in W_0^{(x_r)}$. 由(9)式可得:

$$\mathbf{Y}_r = \frac{2}{3}\mathbf{E}_0^*(x_r)\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}_r \in T\hat{\mathbf{x}}_r = W_0^{(x_r)}.$$

(2) 由命题 3 可知,当基本点为 x_r 时,图 Γ 自同构群关于顶点 x_r 的稳定化子 $H^{(x_r)}$ 中只有恒等置换 e 一个元素,因此有:

$$\{\mathbf{Y} \mid \mathbf{Y} \in \text{Orb}(H^{(x_r)}, X)\} =$$

$$\{\mathbf{Y}_p = \hat{\mathbf{x}}_p \mid 0 \leq p \leq n\}.$$

一方面,由命题 2 和引理 3 可得:

$$W_0^{(x_r)} \subseteq V = \text{span}\{\mathbf{Y}_p \mid 0 \leq p \leq n\}.$$

另一方面,由命题 3 可知,置换 $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots \\ 0 & n & n-1 & \cdots & n-i+1 & \cdots \end{pmatrix}$ ($1 \leq i \leq n$) 为图 Γ 的自同构. 结合命题 1 可得 $T(x_i) \simeq T(x_{n-i+1})$. 因此要证 $V \subseteq W_0^{(x_r)}$, 只需证对任意 $0 \leq p \leq n, \mathbf{Y}_p \in W_0^{(x_r)}$, 其中 $1 \leq r < \frac{n+1}{2}$.

下面根据 r 的取值分类讨论.

情形 1 $r=1$.

通过分析图 Γ 中各顶点的邻接关系可得:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_2,$$

$$\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{Y}_0 + 2\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + 2\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4 + \cdots + \mathbf{Y}_n,$$

$$\mathbf{A}^3\hat{\mathbf{x}}_1 = (n+2)\mathbf{Y}_0 + 2\mathbf{Y}_1 + 5\mathbf{Y}_2 + 3\mathbf{Y}_3 +$$

$$4\mathbf{Y}_4 + 2\mathbf{Y}_n + 3(\mathbf{Y}_5 + \dots + \mathbf{Y}_{n-1}) \quad (10)$$

因此,结合(10)式,由矩阵 $\mathbf{E}_l^*(x_1)$ ($0 \leq l \leq D^{(x_1)}$) 的定义和方程组(7)可得, $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ 之间具有如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &= \frac{1}{n-3} [\mathbf{E}_1^*(x_1) \mathbf{A}^3 \mathbf{Y}_1 - 5\mathbf{E}_1^*(x_1) \mathbf{A}^2 \mathbf{Y}_1], \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{E}_1^*(x_1) \mathbf{A} \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_0, \\ \mathbf{Y}_p &= \begin{cases} \mathbf{E}_2^*(x_1) \mathbf{A} \mathbf{Y}_{p-1}, & p = 3 \text{ 或 } p = 4; \\ \mathbf{E}_2^*(x_1) \mathbf{A} \mathbf{Y}_{p-1} - \mathbf{Y}_{p-2}, & 5 \leq p \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

因此,要证对任意 $0 \leq p \leq n, \mathbf{Y}_p \in W_0^{(x_1)}$, 只需证 $\mathbf{Y}_1 \in W_0^{(x_1)}$ 即可. 由(10)式可得:

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^*(x_1) \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \in \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}_1 = W_0^{(x_1)}.$$

情形 2 $r=2$.

通过分析图 Γ 中各顶点的邻接关系可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_2 &= \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_3, \\ \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 &= 2\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_1 + 3\hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 + \\ &\quad 2\hat{\mathbf{x}}_4 + \hat{\mathbf{x}}_5 + \dots + \hat{\mathbf{x}}_n, \\ \mathbf{A}^3 \hat{\mathbf{x}}_2 &= (n+3)\hat{\mathbf{x}}_0 + 5\hat{\mathbf{x}}_1 + 4\hat{\mathbf{x}}_2 + \\ &\quad 7\hat{\mathbf{x}}_3 + 4\hat{\mathbf{x}}_4 + 5\hat{\mathbf{x}}_5 + 4(\hat{\mathbf{x}}_6 + \dots + \hat{\mathbf{x}}_n) \quad (11) \end{aligned}$$

因此结合(11)式,由矩阵 $\mathbf{E}_l^*(x_2)$ ($0 \leq l \leq D^{(x_2)}$) 的定义和方程组(7)可得, $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ 之间具有如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &= \mathbf{E}_1^*(x_2) \mathbf{A}^2 \mathbf{Y}_2 - \mathbf{A} \mathbf{Y}_2, \\ \mathbf{Y}_3 &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}_1^*(x_2) \mathbf{A}^3 \mathbf{Y}_2 - \\ &\quad 5\mathbf{E}_1^*(x_2) \mathbf{A} \mathbf{Y}_2 - (n-2) \mathbf{Y}_0], \\ \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}_3, \\ \mathbf{Y}_p &= \begin{cases} \mathbf{E}_2^*(x_r) \mathbf{A} \mathbf{Y}_{p-1}, & p = 4 \text{ 或 } p = 5; \\ \mathbf{E}_2^*(x_r) \mathbf{A} \mathbf{Y}_{p-1} - \mathbf{Y}_{p-2}, & 6 \leq p \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

因此,要证对任意 $0 \leq p \leq n, \mathbf{Y}_p \in W_0^{(x_2)}$, 只需证 $\mathbf{Y}_2 \in W_0^{(x_2)}$ 即可. 由(11)式可得:

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{3} \mathbf{E}_0^*(x_2) \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 \in \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}_2 = W_0^{(x_2)}.$$

情形 3 $3 \leq r < (n+1)/2$.

通过分析图 Γ 中各顶点的邻接关系可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_r &= \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_{r-1} + \hat{\mathbf{x}}_{r+1}, \\ \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{x}}_r &= 2\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 + \dots + \hat{\mathbf{x}}_{r-3} + \\ &\quad 2\hat{\mathbf{x}}_{r-2} + \hat{\mathbf{x}}_{r-1} + 3\hat{\mathbf{x}}_r + \hat{\mathbf{x}}_{r+1} + 2\hat{\mathbf{x}}_{r+2} + \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}_{r+3} + \dots + \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \hat{\mathbf{x}}_n, \\ \mathbf{A}^3 \hat{\mathbf{x}}_r &= (n+4)\hat{\mathbf{x}}_0 + 3\hat{\mathbf{x}}_1 + 4\hat{\mathbf{x}}_2 + \dots + 4\hat{\mathbf{x}}_{r-4} + \\ &\quad 5\hat{\mathbf{x}}_{r-3} + 4\hat{\mathbf{x}}_{r-2} + 7\hat{\mathbf{x}}_{r-1} + 4\hat{\mathbf{x}}_r + 7\hat{\mathbf{x}}_{r+1} + \\ &\quad 4\hat{\mathbf{x}}_{r+2} + 5\hat{\mathbf{x}}_{r+3} + 4\hat{\mathbf{x}}_{r+4} + \dots + 4\hat{\mathbf{x}}_{n-1} + 3\hat{\mathbf{x}}_n \quad (12) \end{aligned}$$

由(12)式易得:若 $\max\{2, 2r+2-n\} \leq i \leq r$, 则

$$a^3(i) = a^3(2r-i) \quad (13)$$

将 $s=i=r+1, s=r+1, i=r-1$ 分别代入(5)式,并相减可得:

$$\begin{aligned} a^{r+1}(r+1) - a^{r+1}(r-1) &= \\ \sum_{k=0}^{r-2} C_{r-2}^k a^3(2k+3) + \sum_{w=0}^{r-3} \sum_{k=0}^w C_w^k a^{r-w}(0) - \\ \sum_{k=0}^{r-2} C_{r-2}^k a^3(2k+1) + \sum_{w=0}^{r-3} \sum_{k=0}^w C_w^k a^{r-w}(0) &= \\ a^3(2k-1) + \sum_{k=0}^{r-3} C_{r-2}^k a^3(2k+3) - \\ a^3(1) - \sum_{k=0}^{r-2} C_{r-2}^k a^3(2k+1) &= a^3(2k-1) - \\ a^3(1) + \sum_{k=0}^{r-3} (C_{r-2}^k - C_{r-2}^{k+1}) a^3(2k+3) &= \\ 1 + \sum_{k=0}^{r-3} (C_{r-2}^k - C_{r-2}^{k+1}) a^3(2k+3) \quad (14) \end{aligned}$$

(1) 当 r 为奇数时,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-3} (C_{r-2}^k - C_{r-2}^{k+1}) a^3(2k+3) &= \\ \sum_{k=0}^{(r-5)/2} [(C_{r-2}^k - C_{r-2}^{k+1}) a^3(2k+3) + \\ (C_{r-2}^{r-3-k} - C_{r-2}^{r-2-k}) a^3(2(r-k)-3) + \\ (C_{r-2}^{(r-3)/2} - C_{r-2}^{(r-1)/2}) a^3(r)] &= \sum_{k=0}^{(r-5)/2} [(C_{r-2}^k - \\ C_{r-2}^{r-2-k} + C_{r-2}^{r-3-k} - C_{r-2}^{k+1}) a^3(2k+3)] &= 0. \end{aligned}$$

(2) 当 r 为偶数时,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-3} (C_{r-2}^k - C_{r-2}^{k+1}) a^3(2k+3) &= \\ \sum_{k=0}^{(r-4)/2} [(C_{r-2}^k - C_{r-2}^{k+1}) a^3(2k+3) + [(C_{r-2}^{r-3-k} - \\ C_{r-2}^{r-2-k}) a^3(2(r-k)-3)] &= \sum_{k=0}^{(r-4)/2} [(C_{r-2}^k - \\ C_{r-2}^{r-2-k} + C_{r-2}^{r-3-k} - C_{r-2}^{k+1}) a^3(2k+3)] &= 0. \end{aligned}$$

根据以上 2 种情况,(14)式可化为:

$$a^{r+1}(r+1) - a^{r+1}(r-1) = 1 \quad (15)$$

故结合(12)、(15)式,由方程组(7)和矩阵 $\mathbf{E}_l^*(x_r)$ ($0 \leq l \leq D^{(x_r)}$) 的定义可得, $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ 之间具有如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &= \mathbf{E}_1^*(x_r) \mathbf{A}^2 \mathbf{Y}_r - \mathbf{A} \mathbf{Y}_r, \\ \mathbf{Y}_{r+1} &= \mathbf{E}_1^*(x_r) \mathbf{A}^{r+1} \mathbf{Y}_r - \mathbf{A}^{r+1}(r-1) \mathbf{E}_1^*(x_r) \mathbf{A} \mathbf{Y}_r + \\ &\quad [\mathbf{A}^{r+1}(r-1) - \mathbf{A}^{r+1}(0)] \mathbf{Y}_0, \\ \mathbf{Y}_{r-1} &= \mathbf{E}_1^*(x_r) \mathbf{A} \mathbf{Y}_r - \mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}_{r+1}, \\ \mathbf{Y}_p &= \begin{cases} \mathbf{E}_2^*(x_r) \mathbf{A} \mathbf{Y}_{p+1}, & p = r-2 \text{ 或 } p = r-3; \\ \mathbf{E}_2^*(x_r) \mathbf{A} \mathbf{Y}_{p+1} - \mathbf{Y}_{p+2}, & 1 \leq p \leq r-4; \\ \mathbf{E}_2^*(x_r) \mathbf{A} \mathbf{Y}_{p-1}, & p = r+2 \text{ 或 } p = r+3; \\ \mathbf{E}_2^*(x_r) \mathbf{A} \mathbf{Y}_{p-1} - \mathbf{Y}_{p+2}, & r+4 \leq p \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

因此,要证对任意 $0 \leq p \leq n$, $\mathbf{Y}_p \in W_0^{(x_r)}$, 只需证 $\mathbf{Y}_r \in W_0^{(x_r)}$ 即可。由 (12) 式可得:

$$\mathbf{Y}_r = \frac{1}{3} \mathbf{E}_0^*(x_r) \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{x}}_r \in T\hat{\mathbf{x}}_r = W_0^{(x_r)}.$$

由命题 2 可知, $T \subseteq S$ 。由 S 和 T 都是半单代数^[13]可知, 每个不可约 S -子模作为 T -模是不可约的且 V 是不可约 S - (或 T -) 子模的直和。 V 是忠实的 S -模 (或 T -模), 故不可约 S -子模 (或 T -子模) 的同构类集合就是不可约 S -模 (或 T -模) 的同构类集合, 并且每个不可约 S -模 (或 T -模) 都出现在 V 的直和分解中。由 Wedderburn 定理可知, $S \simeq T$ 当且仅当 V 的不可约 T -子模的同构类与 V 的不可约 S -子模的同构类重合。由定理 2 可得, 扇图的 Terwilliger 代数与其自同构群的点稳定化子的中心化子代数同构的充要条件, 见下列推论。

推论 2 设 $x_r (1 \leq r \leq n)$ 是图 1 中的扇图 Γ 中的顶点, $H^{(x_r)}$ 是图 Γ 自同构群关于顶点 x_r 的稳定化子, S 为 $H^{(x_r)}$ 的中心化子代数, $T = T(x_r)$ 是图 Γ 关于基本点 x_r 的 Terwilliger 代数, 则 $S \simeq T$ 当且仅当 n 为偶数, 或 n 为奇数且 $r \neq (n+1)/2$ 。

3 结 论

本文研究了图的 Terwilliger 代数及其与图自同构群的点稳定化子的中心化子代数之间的关系, 并给出了扇图的自同构群。在此基础上, 本文完全刻画了扇图关于任意基本点的 Terwilliger 代数的不可约模结构, 进一步得到了图的 Terwilliger 代数与其自同构群的点稳定化子的中心化子代数同构的充要条件, 解决了扇图的 Terwilliger 代数刻画问题。

[参 考 文 献]

[1] DELSARTE P. An algebraic approach to the association

schemes of coding theory[J]. Philips Research Reports Supplements, 1973, 10: 1-97.

[2] BANNAI E, MUNEMASA A. The Terwilliger algebras of group association schemes [J]. Kyushu Journal of Mathematics, 1995, 49(1): 93-102.

[3] TERWILLIGER P. The subconstituent algebra of an association scheme (Part I) [J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 1992, 1(4): 363-388.

[4] TERWILLIGER P. The subconstituent algebra of an association scheme (Part II) [J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 1993, 2(1): 73-103.

[5] TERWILLIGER P. The subconstituent algebra of an association scheme (Part III) [J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 1993, 2(2): 177-210.

[6] TERWILLIGER P. Lecture note on Terwilliger algebra [EB/OL]. [2021-12-24]. <http://icu-hsuzuki.github.io/t-algebra>.

[7] LEVSTEIN F, MALDONADO C, PENAZZI D. The Terwilliger algebra of a Hamming scheme $H(d, q)$ [J]. European Journal of Combinatorics, 2006, 27(1): 1-10.

[8] TAN Y Y, FAN Y Z, ITO T, et al. The Terwilliger algebra of the Johnson scheme $J(N, D)$ revisited from the viewpoint of group representations [J]. European Journal of Combinatorics, 2019, 80: 157-171.

[9] LI S D, FAN Y Z, ITO T, et al. The isomorphism problem of trees from the viewpoint of Terwilliger algebras [J]. Journal of Combinatorial Theory Series A, 2021, 177: 105328.

[10] XU J, ITO T, LI S D. Irreducible representations of the terwilliger algebra of a tree [J]. Graphs and Combinatorics, 2021, 37(5): 1749-1773.

[11] FENG R Q, KIM J Y. Pebbling numbers of some graphs [J]. Science in China (Series A), 2002, 45(4): 470-478.

[12] BIGGS N L. Discrete mathematics [M]. Oxford: Oxford University Press, 2002: 271-318.

[13] 谭莹莹. 群表示论下 Johnson 方案的 Terwilliger 代数 [D]. 合肥: 安徽大学, 2018.

[14] GODSIL C D. Algebraic graph theory [M]. New York: Springer, 2001.

(责任编辑 朱晓临)