第 46 卷 第 10 期 合肥工业大学学报(自然科学版) Vol. 46 No. 10
2023 年 10 月 JOURNAL OF HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY (NATURAL SCIENCE) Oct. 2023

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2023.10.020

构造长度为 $4p^s$ 的量子重根循环码

汪余婷, 刘 丽
(合肥工业大学 数学学院,安徽 合肥 230601)

摘 要:文章研究 F_{p^m} 上码长是 $4p^s$ 重根循环码的对偶包含性;基于重根循环码的代数结构,给出 F_{p^m} 上码长是 $4p^s$ 重根循环码是对偶包含码的充要条件,并确定了它们的最小距离;基于 Steane 扩展构造,构造了几类参数较好的非二元量子码。

关键词:量子码;对偶码;汉明距离;循环码;Steane 扩展构造

中图分类号:O157.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1003-5060(2023)10-1430-05

Structure of quantum repeated-root cyclic codes of length $4p^s$

WANG Yuting, LIU Li
(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230601, China)

Abstract: In this paper, the repeated-root cyclic codes of length $4p^s$ over F_{p^m} which contain their dual codes are studied. Based on algebraic structure of the repeated-root cyclic codes, a necessary and sufficient condition for the repeated-root cyclic codes of length $4p^s$ over F_{p^m} which contain their dual codes is given, and their minimum distance is determined. Based on Steane's enlargement construction, several kinds of non-binary quantum codes with better parameters are constructed.

Key words: quantum codes; dual codes; Hamming distance; cyclic codes; Steane's enlargement construction

0 引 言

自文献[1]和文献[2]提出量子纠错码以来,量子码的相关研究开始受到关注。量子纠错是量子计算和量子通信得以实现的重要保证,是信息科学的一个重要组成部分;循环码作为经典纠错码中的重要环节,在量子纠错方面具有重要作用。本文主要研究的是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的重根循环码,并利用它们构造量子码。

文献[3]和文献[4]首次研究了重根循环码;文献[5]求出了在有限域 F_q 上所有码长为 p^s 的负循环码和循环码的距离分布;文献[6]确定了在 $F_{p^m}+uF_{p^m}$ 上所有码长为 p^s 的$(\alpha+u\beta)$-常循环码的最小汉明距离;文献[7]确定了在 Z_4 上长度为 2^e 的循环码最小汉明距离;文献[8-12]研究了在 F_q 上码长为 $2p^s$、$3p^s$、$4p^s$、$5p^s$ 和 $6p^s$ 的所有常循环及其对偶码的生成多项式;文献[13-16]研究了关于码长为 lp^s、l^tp^s 常循环码的相关内容。有限域 F_q 上的一个线性码$[n,k,d]$是 F_q^n 上具有最小汉明距离 d 的 k 维子空间,当其参数满足线性码的某些确定的界时,称码 C 为最优码。构造具有较好参数的量子码一直是编码理论中值得研究的课题。文献[17]对量子纠错码工作的原理进行了深入讨论;文献[18-22]提出了一个系统的数学方案,即利用经典的纠错码在 F_2 或 F_4 上构造具有一定正交性的量子码。近年来,量子码的研究得到了迅速发展,许多参数较好的 BCH 码、R-

收稿日期:2020-10-15;**修回日期**:2020-11-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11871187)
作者简介:汪余婷(1996—),女,安徽合肥人,合肥工业大学硕士生;
刘 丽(1965—),女,安徽枞阳人,博士,合肥工业大学教授,硕士生导师,通信作者,E-mail:liuli-1128@163.com.

S 码、Reed-Muller 码和代数几何码等二进制量子码都是用经典的纠错码构造的。由于非二进制量子码可以使用一般量子计算中的容错量子计算，这一理论后来被扩展到了非二进制的情形。文献[23]首先利用自正交码构造了非二元量子码；文献[24]用一种新的研究方法给出了量子汉明码、二次剩余码、量子 Melas 码、量子 BCH 码等许多非二元量子码，对推动量子码相关领域的发展具有重要作用。

本文基于 Steane 扩展构造，给出 F_q 上线性码 C 为自正交码的条件，构造几类参数较好的非二元量子码。根据在 F_q 上码长为 $4p^s$ 的重根循环码的最小汉明距离以及对偶包含的关系，确定自正交码的条件；根据 Steane 扩展构造的相关内容，构造几类参数较好的量子码。

1　基础知识

设 p 是一个素数，m 是正整数，$q=p^m$，F_q^n 的 k 维子空间称为 q 元$[n,k]$线性码，简称 q 元码。若$(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})\in C$ 能推出$(c_{n-1},c_0,c_1,\cdots,c_{n-2})\in C$，则称线性码 C 为循环码。将码字$(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})\in F_q^n$ 等同多项式 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}\in F_q[x]/\langle x^n-1\rangle$，若 $F_q[x]/\langle x^n-1\rangle$ 对应的子集是多项式剩余类环 $F_q[x]/\langle x^n-1\rangle$的一个理想，则线性码 C 是循环码。

众所周知，$F_q[x]/\langle x^n-1\rangle$的任一个理想都是主理想，即 $C=\langle g(x)\rangle$，其中 $g(x)$是首一的且满足 $g(x)|(x^n-1)$，被称为生成多项式。码 C 的对偶定义为：

$$C^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in F_q^n \mid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0,\forall\,\boldsymbol{y}\in C\},$$

其中，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 是 F_q^n中关于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的 Euclidean 积。若 $C\subseteq C^{\perp}$，则称 C 为自正交；若 $C=C^{\perp}$，则称 C 为自对偶。

长度为 n 维数为 k 的 q 进制量子码是希尔伯特空间 $H=C^{q^n}=C^q\otimes\cdots\otimes C^q$ 的子空间。设 $|\boldsymbol{x}>$是C^q 的正交基且 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}\in F_q$。在 C^q 上，定义 $X(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}>=|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}>$和 $Z(\boldsymbol{b})|\boldsymbol{x}>=\omega^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{bx})}\times|\boldsymbol{x}>$，其中 tr 是从 F_{p^m} 到 F_p 的迹映射，且 $\omega=\exp(2\pi i/p)$是 p 次本原单位根。

对 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in F_q^n$，若

$$X_1(\boldsymbol{a})=X_1(a_1)\otimes X_1(a_2)\otimes\cdots\otimes X_1(a_n),$$
$$X_2(\boldsymbol{a})=X_2(a_1)\otimes X_2(a_2)\otimes\cdots\otimes X_2(a_n),$$

则称集合 $\varepsilon_n=\{X_1(\boldsymbol{a})X_2(\boldsymbol{b})\mid\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in F_q^n\}$是 C^q 上的误差基，且 $T_n=\{\omega^c X_1(\boldsymbol{a})X_2(\boldsymbol{b})\mid\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in F_q^n,c\in F_p\}$是由 ε_n 组成的误差群。对 T_n 中的某些子群 S，稳定子码 D 是 C^{q^n} 上的非零子空间，其中$D=\bigcap\limits_{E\in S}\{\boldsymbol{v}\in C^{q^n}\mid E\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\}$。量子码 D 的极小距离为d 当且仅当可以纠正 D 中所有重量小于 d 但不能纠正重量为d 的某些错误。将长度为 n 有 q^k 个码字和极小距离为 d 的 q 进制量子码记作$[[n,k,d]]_q$。

若 C 是$[[n,k,d]]_q$ 量子码，则 $k\leqslant n-2d+2$，称该界为量子 Singleton 界；若量子码 C 的参数满足$k=n-2d+2$，则称 C 为量子最大距离可分(maximum distance separable，MDS)码。

2　长度为 $4p^s$ 重根循环码的汉明距离

设 C 是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，则 C 是环$R=F_q[x]/\langle x^{4p^s}-1\rangle$的一个理想。

引理 1[25]　设 $q\equiv3(\bmod 4)$且 C 是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，则存在 $0\leqslant i,j,k\leqslant p^s$，使得 $C_{i,j,k}=\langle(x-1)^i(x+1)^j(x^2+1)^k\rangle$，$|C|=q^{4p^s-i-j-2k}$且$C_{i,j,k}^{\perp}=\langle(x-1)^{p^s-i}(x+1)^{p^s-j}(x^2+1)^{p^s-k}\rangle$。

引理 2[25]　设 $q\equiv1(\bmod 4)$，$\delta^2=-1$，且 C 是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，则存在 $0\leqslant i,j,k,l\leqslant p^s$，使得 $C_{i,j,k,l}=\langle(x-1)^i(x+1)^j(x-\delta)^k\cdot(x+\delta)^l\rangle$，$|C|=q^{4p^s-i-j-k-l}$ 且 $C_{i,j,k,l}^{\perp}=\langle(x-1)^{p^s-i}(x+1)^{p^s-j}(x-\delta)^{p^s-l}(x+\delta)^{p^s-k}\rangle$。

下面给出 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码包含其对偶码的充要条件。

定理 1　设 $C_{i,j,k}=\langle(x-1)^i(x+1)^j(x^2+1)^k\rangle$和 $C_{i,j,k,l}=\langle(x-1)^i(x+1)^j(x-\delta)^k(x+\delta)^l\rangle$都是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，其中 $0\leqslant i,j,k,l\leqslant p^s$。则 $C_{i,j,k}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k}$ 当仅当 $0\leqslant i,j,k\leqslant\dfrac{p^s-1}{2}$；$C_{i,j,k,l}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k,l}$ 当且仅当 $0\leqslant k+l\leqslant p^s$，$0\leqslant i,j\leqslant\dfrac{p^s-1}{2}$。

证明　由引理 1、引理 2 知，$C_{i,j,k}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k}$ 当且仅当 $p^s-i\geqslant i$，$p^s-j\geqslant j$，$p^s-k\geqslant k$；$C_{i,j,k,l}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k,l}$ 当且仅当 $0\leqslant i,j,k\leqslant\lfloor p^s/2\rfloor$。因为 p 是奇素数，所以 $C_{i,j,k}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k}$ 当且仅当 $0\leqslant i,j,k,l\leqslant\dfrac{p^s-1}{2}$。同理 $C_{i,j,k,l}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k,l}$ 当且仅当 $0\leqslant k+l\leqslant p^s$，$0\leqslant i,j\leqslant\dfrac{p^s-1}{2}$。

结合文献[26]给出的 F_{p^m} 上码长为 $4p^s$ 的最小汉明距离，对偶包含码的汉明距离见表 1～表 3

所列。

表1　对偶包含码 $C_{i,j,k}$ 的汉明距离

情形	i	j	k	$d_{\mathrm{H}}(C)$
1	0	0	0	1
2	$0<i\leqslant\frac{p^s-1}{2}$	0	0	2
	$k\leqslant i\leqslant p^{s-1}$	0	$0<k\leqslant i$	
3	$p^{s-1}<i\leqslant 2p^{s-1}$	0	$0<k\leqslant 2p^{s-1}$	3
4	$2p^{s-1}<i\leqslant\frac{p^s-1}{2}$	0	$0<k\leqslant\frac{p^s-1}{2}$	4

表2　$0\leqslant l\leqslant j\leqslant k\leqslant i\leqslant p^s$ 时对偶包含码 $C_{i,j,k,l}$ 的汉明距离

情形	i	j	k	l	$d_{\mathrm{H}}(C)$
1	0	0	0	0	1
2	$0<i\leqslant\frac{p^s-1}{2}$	0	0	0	2
		$0<j\leqslant k\leqslant i\leqslant p^{s-1}$			
3	$p^{s-1}<i\leqslant\frac{p^s-1}{2}$	0	$0<k\leqslant p^s$	0	3
	$p^{s-1}<i\leqslant 2p^{s-1}$	$0<j\leqslant k\leqslant 2p^{s-1}$			
4	$2p^{s-1}<i\leqslant\frac{p^s-1}{2}$	$0<j\leqslant\frac{p^s-1}{2}$ 且 $j\leqslant k\leqslant p^s$		0	4

表3　$0\leqslant l\leqslant k\leqslant j\leqslant i\leqslant p^s$ 时对偶包含码 $C_{i,j,k,l}$ 的汉明距离

情形	i	j	k	l	$d_{\mathrm{H}}(C)$
1	0	0	0	0	1
2	$0\leqslant j\leqslant i\leqslant\frac{p^s-1}{2}$				
	$i\neq 0,j\neq 0$		0	0	2
		$0<k\leqslant j\leqslant i\leqslant p^{s-1}$			
4	$2p^{s-1}<i\leqslant\frac{p^s-1}{2}$	$0<k\leqslant j\leqslant\frac{p^s-1}{2}$		0	4

3　构造量子码

本节根据长度为 $4p^s$ 的重根循环码构造几类量子码。

引理3(Steane扩展构造)[27-28]　设 C 和 C' 分别是 F_q 上的线性码 $[n,k_1,d_1]_q$ 和 $[n,k_2,d_2]_q$，若 $C^{\perp}\subseteq C\subseteq C'$ 且 $k_2\geqslant k_1+2$，则存在一个 q 元参数为 $[[n,k_1+k_2-n,\min\{d_1,\lceil d_2((q+1)/q)\rceil\}]]_q$ 的量子码。

定理2　设 q 是奇素数 p 的幂次，若 $s\geqslant 2$ 或 $p\geqslant 5$ 且 $s=1$，则存在一个参数为 $[[4p^s,4p^s-p^{s-1}-4,3]]_q$ 的量子码。

证明　考虑 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码

$$C_{i,j,k}=\langle(x-1)^i(x+1)^j(x^2+1)^k\rangle,$$

其中：$i=p^{s-1}+1$；$j=0$ 且 $k=1$。

对 $p\geqslant 5$ 或 $s\geqslant 1$，有 $i\leqslant(p^s-1)/2$。由定理1可知，$C_{i,j,k}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k}$。易得 q 元参数为 $[4p^s,4p^s-i-2,3]$ 的循环码。设 $C_{1,0,0}$ 是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，$C_{1,0,0}$ 的参数表示为 $[4p^s,4p^s-1,2]$，故 $C_{i,0,1}^{\perp}\subseteq C_{i,0,1}\subseteq C_{1,0,0}$ 且满足 $4p^s-1\geqslant(4p^s-i-2)+2$。由定理1知，存在一个 q 元参数为 $[[4p^s,4p^s-p^{s-1}-4,3]]_q$ 的量子码。

例1　设 $q=p\geqslant 5$ 且 $s=1$，则存在一个 p 元参数为 $[[4p,4p-5,3]]_q$ 的量子码。由量子Singleton界可知，这是一个码长为 $4p$ 且最小距离为3的 q 元量子码，其维数是 $4p-4$。经验证，这是一个参数较好的量子码。

定理3　设 q 是奇素数 p 的幂次，若 $s\geqslant 2$ 或 $p\geqslant 7$ 且 $s=1$，则存在一个参数为 $[[4p^s,4p^s-3p^{s-1}-6,4]]_q$ 的量子码。

证明　考虑 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码

$$C_{i,j,k}=\langle(x-1)^i(x+1)^j(x^2+1)^k\rangle,$$

其中：$i=2p^{s-1}+1$；$j=0$ 且 $k=1$。

对 $p\geqslant 7$ 或 $s\geqslant 1$，有 $i\leqslant(p^s-1)/2$。由定理1可知，$C_{i,j,k}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k}$。易得 q 为 $[4p^s,4p^s-i-2,4]$ 的循环码。设 $C_{i_0,0,1}$ 是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，其中 $i_0=p^{s-1}+1$，易知 $C_{i_0,0,1}$ 是参数为 $[4p^s,4p^s-p^{s-1}-3,3]$ 的循环码，故 $C_{i,0,1}^{\perp}\subseteq C_{i,0,1}\subseteq C_{i_0,0,1}$ 且 $4p^s-p^{s-1}-3\geqslant(4p^s-i-2)+2$。由定理1知，存在一个 q 元参数为 $[[4p^s,4p^s-3p^{s-1}-6,4]]_q$ 的量子码。

例2　设 $q=p\geqslant 7$ 且 $s=1$，则存在一个 p 元参数为 $[[4p,4p-9,4]]_q$ 的量子码。由量子Singleton界可知，这是一个码长为 $4p$ 且最小距离为4的 q 元量子码，其维数是 $4p-8$，是一个参数较好的量子码。

定理4　设 q 是奇素数 p 的幂次，且 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，若 $s\geqslant 2$ 或 $p\geqslant 5$ 且 $s=1$，则存在一个参数为 $[[4p^s,4p^s-p^{s-1}-3,3]]_q$ 的量子码。

证明　考虑 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码

$$C_{i,j,k,l}=\langle(x-1)^i(x+1)^j(x-\delta)^k(x+\delta)^l\rangle,$$

其中：$\delta^2=-1$；$i=p^{s-1}+1$；$j=l=0$ 且 $k=1$。

对 $p\geqslant 5$ 或 $s\geqslant 1$，有 $i\leqslant(p^s-1)/2$。由定理1可知，$C_{i,j,k,l}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k,l}$。易得 q 元参数为 $[4p^s,4p^s-i-1,3]$ 的循环码。设 $C_{1,0,0,0}$ 是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，易知 $C_{1,0,0,0}$ 是参数为 $[4p^s,4p^s-1,2]$ 的循环码，故 $C_{i,0,1,0}^{\perp}\subseteq C_{i,0,1,0}\subseteq C_{1,0,0,0}$ 且 $4p^s-1\geqslant(4p^s-i-1)+2$。由定理1可知，存在一个 q 元参数为 $[[4p^s,4p^s-p^{s-1}-3,3]]_q$ 的量子码。

例3　设 $q=p\geqslant 5$ 且 $s=1$，则存在一个 p 元

参数为 $[[4p,4p-4,3]]_q$ 的量子码。由量子 Singleton 界可知，这是一个码长为 $4p$ 且最小距离为 3 的 q 元量子码，其维数是 $4p-3$，是一个参数较好的量子码。

定理 5　设 q 是奇素数 p 的幂次，且 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，若 $s\geqslant 2$ 或 $p\geqslant 7$ 且 $s=1$，则存在一个参数为 $[[4p^s,4p^s-3p^{s-1}-5,4]]_q$ 的量子码。

证明　考虑 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码 $C_{i,j,k,l}=\langle (x-1)^i(x+1)^j(x-\delta)^k(x+\delta)^l\rangle$，其中：$\delta^2=-1$；$i=2p^{s-1}+1$；$j=k=1$ 且 $l=0$。

对 $p\geqslant 7$ 或 $s\geqslant 1$，有 $i\leqslant (p^s-1)/2$。由定理 1 可知，$C_{i,j,k,l}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k,l}$。易得 q 元参数为 $[4p^s,4p^s-i-2,4]$ 的循环码。设 $C_{i_0,0,1,0}$ 是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，其中 $i_0=p^{s-1}+1$，易得参数为 $[4p^s,4p^s-p^{s-1}-2,3]$ 的循环码，故 $C_{i,1,1,0}^{\perp}\subseteq C_{i,1,1,0}\subseteq C_{i_0,0,1,0}$ 且 $4p^s-p^{s-1}-2\geqslant (4p^s-i-2)+2$。由定理 1 及表 2 可知，存在一个 q 元参数为 $[[4p^s,4p^s-3p^{s-1}-5,4]]_q$ 的量子码。

例 4　设 $q=p\geqslant 7$ 且 $s=1$，则存在一个 p 元参数为 $[[4p,4p-8,4]]_q$ 的量子码。由量子 Singleton 界可知，这是一个码长为 $4p$ 且维数是 $4p-8$，其最小距离最大为 5 的 q 元量子码，因此是一个近似 MDS 码。

定理 6　设 q 是奇素数 p 的幂次，且 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，若 $s\geqslant 2$ 或 $p\geqslant 7$ 且 $s=1$，则存在一个参数 $[[4p^s,4p^s-p^{s-1}-6,3]]_q$ 的量子码。

证明　考虑 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码 $C_{i,j,k,l}=\langle (x-1)^i(x+1)^j(x-\delta)^k(x+\delta)^l\rangle$，其中：$\delta^2=-1$；$i=2p^{s-1}+1$；$j=k=1$ 且 $l=0$。

对 $p\geqslant 7$ 或 $s\geqslant 1$，有 $i\leqslant p^s-1/2$。由定理 1 可知，$C_{i,j,k,l}^{\perp}\subseteq C_{i,j,k,l}$。易得 q 元参数为 $[4p^s,4p^s-i-2,4]$ 的循环码。设 $C_{1,1,1,0}$ 是 F_q 上码长为 $4p^s$ 的循环码，其中 $i=j=k=1$ 且 $l=0$，易得参数为 $[4p^s,4p^s-3,2]$ 的循环码，故 $C_{i,1,1,0}^{\perp}\subseteq C_{i,1,1,0}\subseteq C_{1,1,1,0}$ 且 $4p^s-3\geqslant (4p^s-i-2)+2$。由定理 1 及表 3 可知，存在一个 q 元参数为 $[[4p^s,4p^s-2p^{s-1}-6,3]]_q$ 的量子码。

例 5　设 $q=p\geqslant 7$ 且 $s=1$，则存在一个 p 元参数为 $[[4p,4p-8,3]]_q$ 的量子码。由量子 Singleton 界可知，这是一个码长为 $4p$ 且维数是 $4p-8$的 q 元量子码，其最小距离最大为 5 的 q 元量子码，因此是一个近似 MDS 码。

5　结　论

本文在 F_q 上码长为 $4p^s$ 重根循环码的基础上，基于 Steane 扩展构造，构造了几类极小距离、维数等参数均有改进的非二元量子码。利用循环码的其他码长来构造新的参数较好的量子码是进一步可以研究的问题。

［参　考　文　献］

[1] SHOR P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory[J]. Physical Review A，1995，52(4)：2493-2496.

[2] STEANE A M. Error correcting codes in quantum theory[J]. Physical Review Letters，1996，77(5)：793-797.

[3] CASTAGNOLI G，MASSEY J H，SCHOELLER P A. On repeated-root cyclic codes[J]. IEEE Transtration on Information Theory，2002，37(2)：337-342.

[4] VAN LINT J H. Repeated-root cyclic codes[J]. IEEE Transtration on Information Theory，1991，37(2)：343-345.

[5] DINH H Q. On the linear ordering of some classes of negacyclic and cyclic codes and their distance distributions[J]. Finite Fields & Their Applications，2008，14(1)：22-40.

[6] DINH H Q. Constacyclic codes of length p^s over $F_{p^m}+uF_{p^m}$[J]. Algebra，2010，324(5)：940-950.

[7] KAI X，ZHU S. On the distance of cyclic codes of length 2^e over Z_4[J]. Discrete Mathematics，2010，310(1)：12-20.

[8] DINH H Q. Repeated-root constacyclic codes of length $2p^s$[J]. Finite Fields & Their Applications，2012，18(1)：133-143.

[9] DINH H Q. Structure of repeated-root constacyclic codes of length $3p^s$ and their duals[J]. Discrete Mathematics，2013，313(9)：983-991.

[10] DINH H Q. Structure of repeated-root cyclic codes and negacyclic codes of length $6p^s$ and their duals[J]. Contemporary Mathematics，2014，609(2014)：69-87.

[11] DINH H Q，WANG X，LIU H，et al. On the Hamming distances of repeated-root constacyclic codes of length $4p^s$[J]. Discrete Mathematics，2019，342(5)：1456-1470.

[12] DINH H Q，WANG X，SIRISRISAKULCHAI J. On the Hamming distances of constacyclic codes of length $5p^s$[J]. IEEE Access，2020，8：46242-46254.

[13] CHEN B，FAN Y，LIN L，et al. Constacyclic codes over finite fields[J]. Finite Fields & Their Applications，2012，18(6)：1217-1231.

[14] CHEN B，DINH H Q，LIU H. Repeated-root constacyclic codes of lengthl p^s and their duals[J]. Discrete Applied Mathematics，2014，177：60-70.

[15] RAKA M A class of constacyclic codes over a finite field[J]. Communications on Pure & Applied Mathematics，2015，46(6)：809-825.

[16] SHARMA A. Repeated-root constacyclic codes of length l^tp^s and their duals codes[J]. Cryptogr Commun，2015，7：229-255.

[17] CALDERBANK A R，SHOR P W. Good quantum error-correcting codes exist[J]. Physical Review A，1996，54(2)：1098-1105.

[18] COHEN G，ENCHVEA S，LITSYN S. On binary construc-

tions of quantum codes[J]. IEEE Transtration on Information Theory,1999,45(7):2495-2498.

[19] LI Z,ZHANG S H. Quantitative function for community detection[J]. Physical Review E,2008,77(3):036109.

[20] STEANE A M. Quantum Reed-Muller codes[J]. IEEE Transtration on Information Theory,1999,45(5):1701-1703.

[21] STEANE A M. Enlargement of Calderbank-ShorSteane quantum codes[J]. IEEE Transtration on Information Theory, 1999,45 (7):2492-2495.

[22] CHEN W H,LI Y J. On the construction of some optimal polynomial codes[J]. Computational Intelligence and Security, 2005,3802:74-79.

[23] ASHIKHMIN A, KNILL E. Nonbinary quantum stabilizer codes[J]. IEEE Transtration on Information Theory, 2001, 47(7):3065-3072.

[24] KETKAR A,KLAPENECKER A,KUMAR S,et al. Nonbinary stabilizer codes over finite fields[J]. IEEE Transtration on Information Theory,2006,52 (11):4892-4914.

[25] DINH H Q. On Repeated-root constacyclic codes of length $4p^s$[J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2012, 6(2): 1350020-1350045.

[26] DINH H Q,WANG X Q,LIU H W,et al. On the Hamming distances of repeated-root constacyclic codes of length $4p^s$[J]. Discrete Mathematics,2019,342 (5):1456-1470.

[27] LING S,LUO J,XING C. Enlargement construction of quantum codes and applications[J]. IEEE Transtration on Information Theory,2010,56(8):4080-4084.

[28] HAMADA M. Concatenated quantum codes constructible in polynomial time: efficient decoding and error correction[J]. IEEE Transtration on Information Theory, 2009, 54(12): 5689-5704.

(责任编辑 朱晓临)

(上接第 1422 页)

[10] DARANFED W,AIDA M S,ATTAF N,et al. Cu_2ZnSnS_4 thin films deposition by ultrasonic spray pyrolysis[J]. Journal of Alloys and Compounds,2012,542:22-27.

[11] KIM J S,YOON J W,HONG Y J,et al. Highly sensitive and selective detection of ppb-level NO_2 using multi-shelled WO_3 yolk:shell spheres[J]. Sensors and Actuators B:Chemical,2016,229:561-569.

[12] MEIXNER H,GERBLINGER J,LAMPE U,et al. Thin-film gas sensors based on semiconducting metal oxides[J]. Sensors and Actuators B:Chemical,1995,23(2):119-125.

[13] YANG G,BISWAS P,BOOLCHAND P,et al. Deposition of multifunctional titania ceramic films by aerosol routes [J]. Journal of the American Ceramic Society, 1999, 82(10):2573-2579.

[14] CUBILLOS G I,BETHENCOURT M,OLAYA J J. Corrosion resistance of zirconium oxynitride coatings deposited via DC unbalanced magnetron sputtering and spray pyrolysis-nitriding[J]. Applied Surface Science, 2015, 327: 288-295.

[15] BOHAC P,GAUCKLER L. Chemical spray deposition of YSZ and GCO solid electrolyte films[J]. Solid State Ionics,1999,119(1):317-321.

[16] OH E O,WHANG C M,LEE Y R,et al. Thin film yttria-stabilized zirconia electrolyte for intermediate-temperature solid oxide fuel cells (IT-SOFCs) by chemical solution deposition[J]. Journal of the European Ceramic Society, 2012,32(8):1733-1741.

[17] ORTIZ A,ALONSO J C. High quality-low temperature aluminum oxide films deposited by ultrasonic spray pyrolysis[J]. Journal of Materials Science:Materials in Electronics,2002,13(1):7-11.

[18] LI Z,ZHANG D,YANG F. Developments of lithium-ion batteries and challenges of $LiFePO_4$ as one promising cathode material [J]. Journal of Materials Science, 2009, 44(10):2435-2443.

[19] SIVARAJ D,VIJAYALAKSHMI K. Substantial effect of magnesium incorporation on hydroxyapatite/carbon nanotubes coatings on metallic implant surfaces for better anticorrosive protection and antibacterial ability[J]. Journal of Analytical and Applied Pyrolysis,2018,135:15-21.

[20] PATEL B,PATI R K,MUKHOPADHYAY I,et al. Electrical properties modulation in spray pyrolysed Cu_2SnS_3 thin films through variation of copper precursor concentration for photovoltaic application[J]. Journal of Analytical and Applied Pyrolysis,2018,136:35-43.

[21] ZATE M K,JADHAV V V,GORE S K,et al. Structural, morphological and electrochemical supercapacitive properties of sprayed manganese ferrite thin film electrode[J]. Journal of Analytical and Applied Pyrolysis, 2016, 122: 224-229.

[22] REN W,AI Z,JIA F,et al. Low temperature preparation and visible light photocatalytic activity of mesoporous carbon-doped crystalline TiO_2[J]. Applied Catalysis B:Environmental,2007,69(3/4):138-144.

[23] HAJJAR Z,KAZEMEINI M,RASHIDI A,et al. Naphtha HDS over Co-Mo/Graphene catalyst synthesized through the spray pyrolysis technique[J]. Journal of Analytical and Applied Pyrolysis,2017,123:144-151.

[24] KIM Y,YOON Y,SHIN D. Fabrication of Sn/SnO_2 composite powder for anode of lithium ion battery by aerosol flame deposition[J]. Journal of Analytical and Applied Pyrolysis,2009,85(1/2):557-560.

(责任编辑 闫杏丽)