

DOI:10.3969/j.issn.1003-5060.2023.01.015

# 基于离散-连续耦合法的埋地管道 受荷过程模拟分析

侯超群, 程一朋, 李永鑫, 孙志彬, 蒋道文

(合肥工业大学汽车与交通工程学院, 安徽合肥 230009)

**摘要:**为了从宏、细观角度反映出埋地管道管周土体的承载特点,文章采用离散-连续界面耦合数值模型对埋地管道受荷过程进行模拟分析,其中管周填土采用离散单元法进行模拟,埋地管道及原状土基采用有限差分单元法进行模拟。结果表明:随着荷载或埋深的增大,管顶受压产生压缩变形,管顶土体发生“压力拱效应”,引起管周土压力重分布;耦合模型水平位移场显示埋地管道在受荷过程中管侧回填土及原状土基能够分担和转移外荷载;管周土体的细观接触力链分布形态与管顶土压力的分布规律形成相互印证。

**关键词:**埋地管道;离散-连续耦合法;接触力链;离散元

**中图分类号:**TU443 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-5060(2023)01-0096-08

## Simulation analysis of loading process of buried pipeline based on discrete-continuous coupling method

HOU Chaoqun, CHENG Yipeng, LI Yongxin, SUN Zhibin, JIANG Xiaowen

(School of Automobile and Traffic Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** To represent the bearing and force transmission features of the surrounding soil of buried pipeline from the macro and meso view, the numerical model of discrete-continuous interface coupling is applied to simulating and analyzing the loading process of buried pipeline. The backfill around the buried pipeline is simulated by the discrete element method, and the buried pipeline and the undisturbed soil foundation are simulated by the finite difference element method. The results show that as the load or burial depth increases, the top of the pipeline is compressed and deformed. The soil on the top of the pipeline is subjected to the pressure arch effect, which causes a redistribution of soil pressure around the pipeline. The distribution of the horizontal displacement shows that the buried pipeline transfers the external loads between the backfill and the undisturbed soil foundation during the loading process. The distribution of the contact force chain of the soil around the pipeline has a good agreement with that of the soil pressure on the top of the pipeline.

**Key words:** buried pipeline; discrete-continuous coupling method; contact force chain; discrete element

随着我国城市化不断推进,在城市道路下方布设管道以提升城市空间利用率的方式日趋多见<sup>[1]</sup>。由于管道多敷设于地下,属隐蔽工程,因此其变形、损坏不易发现,并具有危害性大等特点。近年来,埋地管道在荷载作用下的损坏现象频发,轻则影响管道的正常使用,重则导致严重的公共

安全问题。埋地管道所承受的荷载作用主要通过管周土体进行传递,因此探讨埋地管道在荷载作用下管周土体承载和传力的机制,对保证地下管网的安全运营具有重要意义。

国内外诸多学者采用数值模拟方法对荷载作用下埋地管道的受力情况及管土相互作用开展了

收稿日期:2021-01-17;修回日期:2021-03-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(5210081105);安徽省自然科学基金资助项目(2108085QE250)和中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(JZ2021HGTA0160)

作者简介:侯超群(1979—),男,安徽萧县人,博士,合肥工业大学副教授,硕士生导师。

较为深入的研究<sup>[2-5]</sup>。数值模拟可采用的方法包括有限元法、有限差分法和离散元法等。有限元法和有限差分法基于连续介质力学,难以准确详细地描述细观力学行为;而离散元法虽然能够从细观尺度研究构筑物的力学行为,但当模型颗粒数目较多时,计算耗时较长,对计算机的算力也有较高的要求。连续-离散耦合的方法能够将离散元法和有限差分法的优势结合,发挥出良好的应用价值。文献[6-8]采用连续-离散耦合方法对静载下岩土结构的变形、颗粒位移场、土压力分布进行细观分析,并验证了耦合模拟的有效性;文献[9]采用三维离散-连续耦合法对预制桩沉桩过程进行模拟分析,研究了沉桩过程中桩周土颗粒的运动趋势和振动频率对助沉效果的影响;文献[10]采用连续-非连续介质耦合数值模型从碎石桩失效与细观颗粒受力运动的联系角度对碎石桩受荷的变形及破坏全过程进行了模拟分析;文献[11-12]基于土体连续-离散耦合算法,证明了土体连续-离散耦合方法可以从细观尺度描述重点研究区域的土体和结构的破坏过程以及盾构时隧道掌子面的细观颗粒特性。以上文献研究表明,采用连续-离散耦合算法可以从细观尺度研究重点区域或结构的力、位移的变化规律以及破坏机制过程,并能达到良好的效果。但现有文献中对埋地管道采用离散-连续界面耦合法的研究却鲜有报道。

以往对于荷载作用下埋地管道的研究中,多数学者采用连续介质数值模拟等方法来研究埋地管道的受力情况,难以从细观角度全面具体地揭示荷载作用下埋地管道的管周土体的动态作用过程。本文基于离散-连续界面耦合法,建立三维埋地管道数值模型,从宏、细观尺度结合对埋地管道及管周土体受荷过程中的受力情况和荷载传递机理进行分析研究。

## 1 埋地管道三维耦合数值模型建立

### 1.1 耦合原理

离散-连续界面耦合法,即对模型内部关键细观研究区域采用离散单元法以便于细观研究,在模型非关键研究区域采用连续介质单元法以提高计算效率。针对本文研究对象,对管周土体等核心细观研究区域采用离散单元,其余部分(原状土基及管道)采用有限差分法模拟,两者之间通过设置耦合界面元素实现速度与力的相互交换传输<sup>[13-14]</sup>,具体如图 1 所示。

由 FLAC 模型求解得到的速度通过耦合界面传递至 PFC 模型,由此 PFC 模型得到响应更新,其对耦合界面部位产生的作用力返回至 FLAC 模型,作为 FLAC 模型力学响应更新的条件,以此循环运算。本文中的离散-连续界面耦合法通过在耦合界面处设置墙单元 Wall 来实现 PFC 与 FLAC 之间的数据交换传输运算。

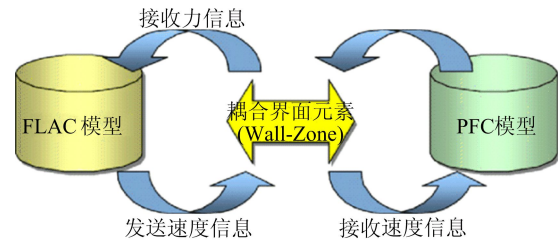


图 1 耦合计算原理

附着于 FLAC 模型元素表面(单元 Zone 表面或结构单元面)上的 PFC 模型组件 Wall 是由三角形拼接而成,如图 2 所示。 $C$  为某一球颗粒单元与三角形墙面(Wall 单元)的接触点, $P_C$  为墙面上距  $C$  点最近的点。从  $P_C$  到三角形的顶点采用重心插值法外推。

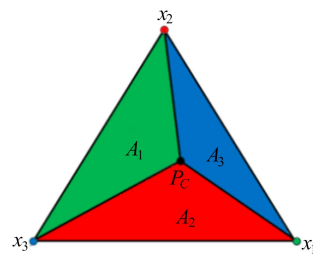


图 2 耦合中力的传递

图 2 中: $x_i$  表示 Wall 角点及其附着部位 FLAC3D 的 Zone 节点的坐标; $A_i$  定义为 3 个表征三角形的面积(在耦合变量解译过程中,1 个 Wall 单元进一步分解为 3 个三角形)。定义  $r_i$  为  $P_C$  与  $x_i$  的距离。施加在每一个网格节点的力为  $F_i$  ( $i=1,2,3$ ),施加在接触点上的总接触力为  $F$ ,接触点处因黏结产生的弯矩为  $M_b$ 。由于接触部位的变形同时存在拉伸、剪切及其扭转作用, $P_C$  与  $C$  两点在空间的位置可能存在不共点的情形,因此作用在接触平面的总力矩  $M$  为:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_b + (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_{P_C}) \times \mathbf{F} \quad (1)$$

由此,FLAC3D 模型元素在 Wall 附着部位即角点  $x_i$  处,承受着来自于接触耦合作用  $P_C$  处的集中力  $F_i$  和弯矩  $M_i$ ,其值计算可采用加权法,计算

公式为:

$$F_i = A_i F / \sum_{i=1}^3 A_i \quad (2)$$

$$M_i = r_i \times F_i \quad (3)$$

当点  $P_c$  外推触发三角形区域的节点和结构单元更新,使其网格点和节点能够直接添加刚度,即分别对 FLAC3D 和 PFC3D 设置单元相关参数,通过三角形区域介质实现力与速度信息的相互传递计算。

### 1.2 模型建立

本文基于 PFC3D6.0 程序软件平台,通过加载 FLAC3D 有限差分计算模块来实现埋地管道受荷模拟的构建。在建模过程中,考虑了管道埋置过程。其模拟过程如下:首先建立完整的连续网格模型;然后对模型进行开挖,并放置管道;通过在管道周围填充颗粒,完成管道埋置;最后,在地表施加上部荷载,进行加载模拟。

管道回填土采用 PFC3D 的 ball 颗粒模拟,管道及原状土基采用 FLAC3D 的实体单元模拟。在填充颗粒之前,在管道外侧及原状土地基表面通过命令流“Wall-Zone”生成耦合墙 Wall 单元,作为耦合计算数据交换的媒介。填土的区域为梯形,该区域需采用 geometry 命令进行定义,再采用 ball distribute

range geometry-space 命令填充颗粒,并删除管道区域内的颗粒。颗粒生成完成后,颗粒与单元网格之间自动通过耦合墙 Wall 单元进行计算。

模型的顶面自由,不设约束条件,其余边界均施加法向约束条件。模型在重力作用下达到初始平衡后对位移清零,然后再进行管道埋置与荷载施加。荷载施加宽度与管道宽度相同,通过设置 Wall 单元以便对颗粒施加上部荷载。埋地管道管径选取  $D=1.5\text{ m}$ ,选取空管工况,即管内无压力。

所建立的耦合模型如图 3 所示(单位为 m)。

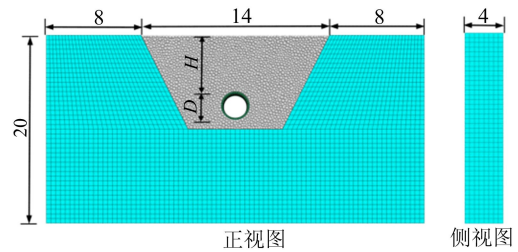


图 3 埋地管道模型

### 1.3 模型宏、细观参数选取

颗粒细观参数见表 1 所列,模型宏观参数见表 2 所列。

表 1 颗粒细观参数

土层	颗粒接触刚度/ MPa	接触 刚度比	摩擦 系数	颗粒粒径/ m	法向黏结强度/ kPa	切向黏结强度/ kPa
回填土	78	1.0	0.1	0.01~0.02	1 000	450

表 2 模型宏观参数

项目	密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	弹性模量/MPa	泊松比	内摩擦角/( $^\circ$ )	黏聚力/kPa
原状土	1 850	6	0.35	30	10
埋地管道	265	$2.05 \times 10^5$	0.30		

为保证耦合模型在宏观、细观上力学特性的一致性,颗粒细观参数是与三轴数据标定后获得的。

分析埋地管道力学性能时,考虑管周回填土与原状土基性质差异,对管周回填土与原状土基选取不同的变形模量和密实度。由于管道埋深和外部荷载因素(荷载施加于管道的正上方,作用宽度与管道宽度相同)对埋地管道力学性能和受荷作用过程的影响,各种数值模拟工况方案见表 3 所列。

表 3 数值模拟计算工况方案

工况	管道埋深 $H/\text{m}$	施加荷载大小 $P/\text{MPa}$	回填土模量 $E/\text{MPa}$
P1		$P_1=0.1$	
P2	$3D$	$P_2=0.3$	8
P3		$P_3=0.5$	
H1	$H_1=1D$		
H2	$H_2=3D$	0.5	8
H3	$H_3=5D$		

### 2 埋地管道受荷过程受力变形特征

通过建立离散-连续耦合模型,考虑不同工况下的数值模拟来分析管道及管周土体位移、管道径向变形及管周土压力的情况。

#### 2.1 竖向位移分析

数值模型在不同荷载大小作用下(埋深  $H=3D$ )对应的管周土体及管道竖向位移分布如图 4 所示(单位为 m)。

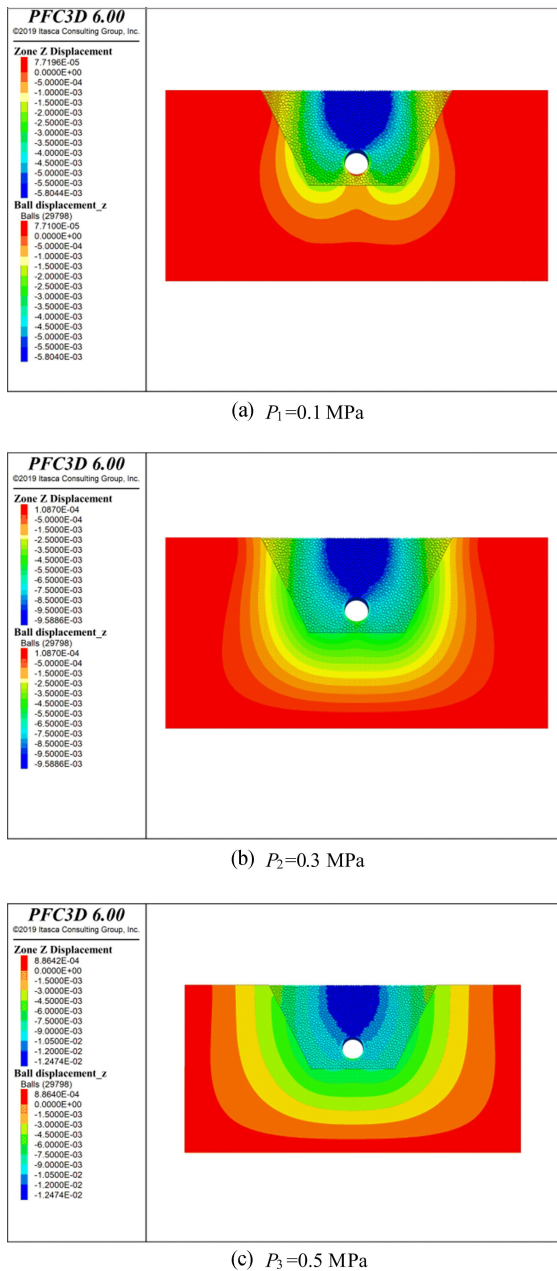


图 4 不同荷载作用下对应的竖向位移分布图

从图 4 可以看出,管周土体竖向位移呈现“U”形分层分布,即中间位移大、两侧位移小。这是由于在竖向受压条件下管道收缩,管道顶部土

体产生大幅位移量,同时管顶土体在向下方移动时产生的拖曳力对周边土体起牵拉作用,使管侧土体产生小幅位移量。随着施加荷载的增大,在地表产生大变形的范围也越大,同时大变形在地下的影响深度也越深,管顶产生的变形也愈大,对管道的影响程度也愈大。

#### 2.2 管周土压力分析

外部荷载对埋地管道的影响经由管周土体传递,管周土体既作为传递荷载的媒介,自身重力又作为荷载以压力的形式直接作用在管道上,管周土压力的分布情况将对管道的损坏有直接影响,因此有必要研究在外荷载作用下管周土压力的分布规律。本文根据模拟结果提取得到管周应力,经换算和分解得到作用在管道上的竖直和水平方向的土压力,如图 5 所示。

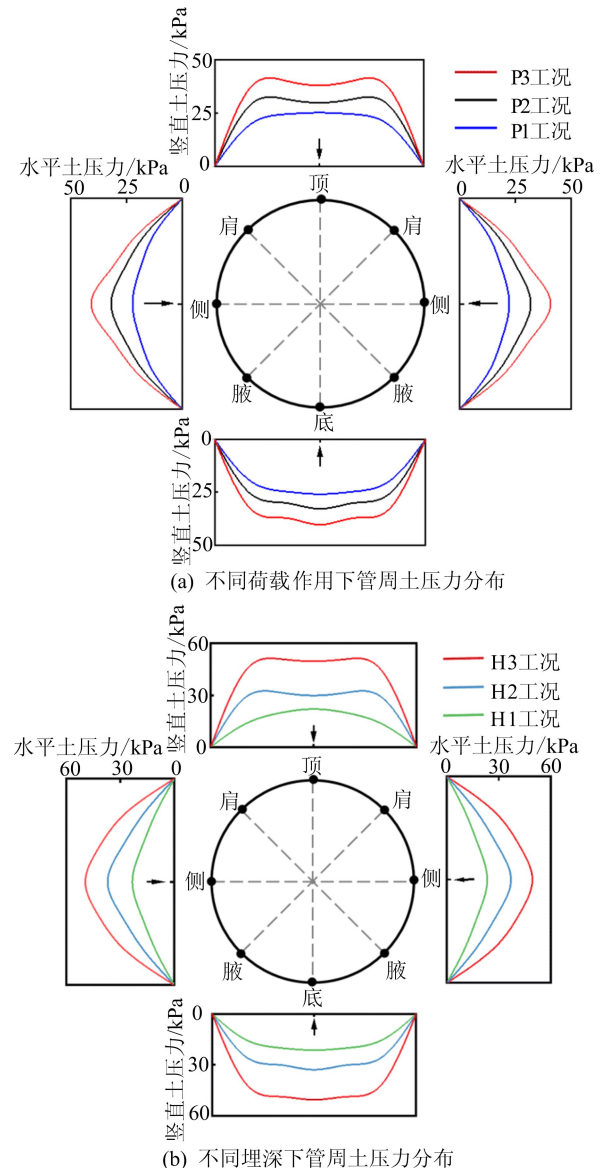


图 5 不同工况下管周土压力分布

从图 5a 可以看出, P1 工况下的管顶与管底处管周土压力分布规律与 P2 或 P3 工况有差别, 说明外部荷载的大小对土压力的规律有影响, 造成管周土压力重分布。随着外部荷载的增大, 管顶、管侧和管底处土压力峰值均增大。在 P1 工况下, 管顶土压力变化趋势为先增大后减小, 极值出现在管顶; 但在 P2 和 P3 工况下, 管顶土压力从管顶向管侧先缓慢增加再急剧减小, 波谷在管顶处, 波峰在管肩处附近。在 P1、P2 和 P3 工况下, 管底土压力从管底部向管腹部呈现轻微波动, 然后再急剧减少, 在管底处受到地基反力作用和沟槽底部土体受力向内侧挤压使土压力产生波动。在 P1、P2 和 P3 工况下, 水平土压力均呈现先增大后减小, 在管侧处达到极大值, 在顶部和底部达到最小。

由图 5b 可知, H1、H2 和 H3 工况下的管周土压力分布规律与在 P1、P2 和 P3 工况下相似, 不再一一叙述。可以看出管周土压力随着埋深的不断增加而增大, 并且增大的幅度也越来越大; 且随着埋深的增大, 管顶土压力也会产生重分布。

综上可知, 在管道上方总荷载(外部荷载与土体自重荷载之和)达到一定数值后, 使管顶受压产生一定的压缩变形, 管道上方土体产生“压力拱效应”, 使土体荷载传递方式发生变化, 从而使管周土压力重分布。

### 2.3 管道径向位移分析

埋地管道在荷载作用下发生变形, 这种变形不仅会影响管周土压力的分布, 还会造成管道的损毁, 影响管道的正常使用。不同工况下管道径向位移变化如图 6 所示。

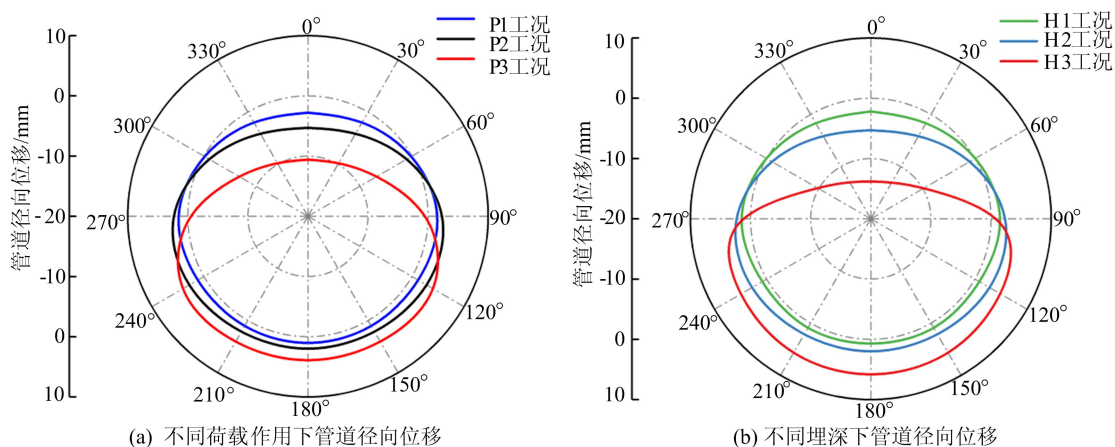


图 6 不同工况下管道径向位移变化曲线

由图 6 可知, 埋地管道在外部荷载作用下竖向发生挤压, 水平向发生侧向鼓胀, 管体截面在压力作用下由原先的圆形变化为椭圆状, 其变形程度可以由椭圆度的计算公式来衡量。椭圆度的计算公式<sup>[15]</sup>为:

$$\Delta\theta = \frac{2(D_{\max} - D_{\min})}{D_{\max} + D_{\min}} \quad (4)$$

其中:  $D_{\max}$  为最大管径长;  $D_{\min}$  为最小管径长。

经由(4)式计算可得, 在 P1、P2、P3 和 H1、H2、H3 工况下, 管道变形的椭圆度分别为 2.05%、3.18%、5.26% 和 1.42%、3.18%、6.15%。可知随着荷载的增大, 管道椭圆变形的程度越大, 并且管顶与管底竖向的相对位移差也增大, 易造成管道压缩损坏。在实际工程中, 应禁止车辆超载等外荷载过大而造成埋地管道损坏。随着埋深的增大, 由于管道上部土体重力的增大,

管道椭圆变形的程度也愈大。

## 3 埋地管道受荷动态过程分析

### 3.1 水平位移分析

在固定荷载作用下(埋深  $H=3D$ , 荷载  $P_2=0.3$  MPa), 耦合模型不同时步的水平方向位移分布如图 7 所示。

从图 7 可以看出, 管周土体位移和原状土基土的位移在耦合界面处取得了较好的连续性与一致性, 表明离散元颗粒与有限差分法网格产生良好的耦合效果。

在荷载作用下, 由于管道的强度高于土体的强度, 使管道上方的土体沿管道中心对称面向两侧斜下方呈“八”字形放射状位移(见图 7a)。随着计算时步的增加, 沟槽内土体与原状土基产生连续的位移, 并该“八”字形位移范围不断下移与

扩大,逐步与管道相接触产生影响;在荷载的作用下,管道竖直向受压缩,产生水平向向两侧鼓胀变形,挤压致使管侧土体向斜下方位移运动,并与外部荷载产生的向斜下方的位移作用相结合,产生形似“蝴蝶”状的水平位移范围,位移范围逐渐向

原状土基两侧下部扩散;最后水平位移大部分传至原状土基。

从图 7 中土体水平位移趋势可以看出,埋地管道在受荷载作用过程中,管道两侧回填土及原状土基能够承担一部分外部荷载。

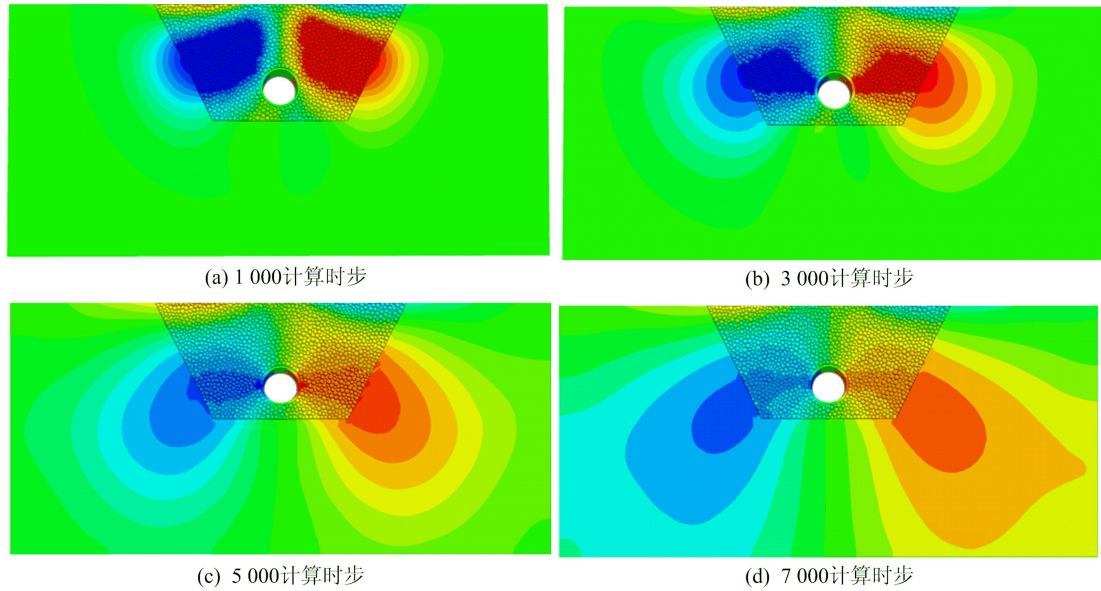


图 7 固定荷载作用下不同计算时步的模型水平位移图

### 3.2 微观接触力链分析

在颗粒自身重力或外部荷载的作用下,颗粒物质体系中的相邻颗粒间引发接触,接触产生的网络结构成为颗粒间传递作用力的途径,该传力路径称为接触力链<sup>[16]</sup>。

为了研究荷载作用过程中管周土颗粒的受力情况,选择不同时步的土颗粒间的接触力链进行分析。

通过耦合法构建的埋地管道模型,可以从细

观尺度直接观察埋地管周土颗粒的受力情况。在固定荷载作用下( $H=3D, P_2=0.3\text{ MPa}$ ),不同计算时步的管周土颗粒间接触力链的分布如图 8 所示(单位为 N)。

接触力在图 8 中以柱体显示,圆柱体的颜色与接触力大小相匹配。由于土体细化成颗粒的数量众多,并且接触力梯度的间隔较大,为了便于观察分析,在图 8 中显示以 500 N 为尺度间隔的接触力。

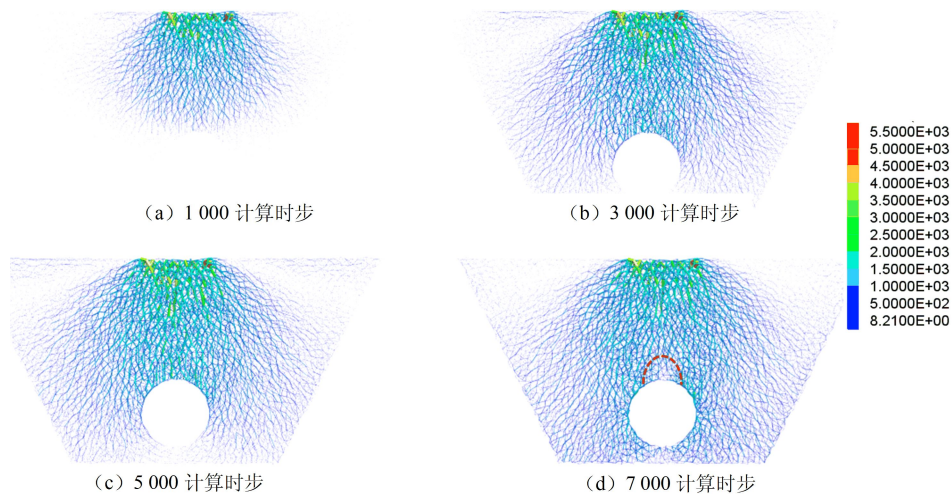


图 8 固定荷载作用下不同计算时步的管周土体接触力链图

从图 8 可以看出:地表土体由于直接承受外部荷载产生了少数量的强接触力链,且这些接触力链以一种树根状的形式向下方生长扩散并传递荷载;在外荷载向下的传递过程中,这些强力链逐渐向下延伸直至管顶,并向四周扩散形成数量更多强度稍低的弱力链,以使荷载向两侧土体分散;由强、弱力链相互联结形成的力链网络逐步向管顶、管侧及管底发展延伸,使管道产生变形。随着管顶受力作用产生竖直压缩变形,使其管顶小范围内土体松动(图 8d 中红虚线范围内,接触力链显示为弱力链),从而管道两肩侧土体受力产生强力链,并形成“压力拱效应”,使管顶受力有所减弱,管肩处受力增大,这与竖向最大位移出现在管顶、竖向最大压力出现在管肩处的结论相符。

### 3.3 位移矢量分析

为研究荷载作用过程中管周土颗粒位移变化趋势,选择不同时步的土颗粒位移矢量场进行分

析。管周土颗粒在荷载作用下位移矢量分布如图 9 所示,其中箭头为土颗粒的位移方向。

从图 9 可以看出,地表土体由于直接接触竖向荷载,在地表荷载作用区域内土体瞬时产生了向下的位移。由于原状土基的模量与密实度比管周填土的大,原状土基附近填土的位移发生隆起。随着计算时步的进行,荷载作用影响的范围越来越大,沟槽内管道两侧的土体位移方向由与竖直方向有一定的夹角慢慢趋于竖直方向,位移逐渐向原状土基扩散。当在荷载作用下,回填土的密实度达到一定值后,其沟槽内的土体整体均竖直向下移动。由于沟槽壁对回填土的下沉产生向上的摩擦力,使得接触沟槽壁的土体位移量会稍减小。最后,管道上方的土体绕过管道向斜下方运动,且具有明显的方向趋势。因为管道有一定的变形吸收作用,所以管底的土体位移量小于管顶的位移量,产生管顶与管底的相对位移差。

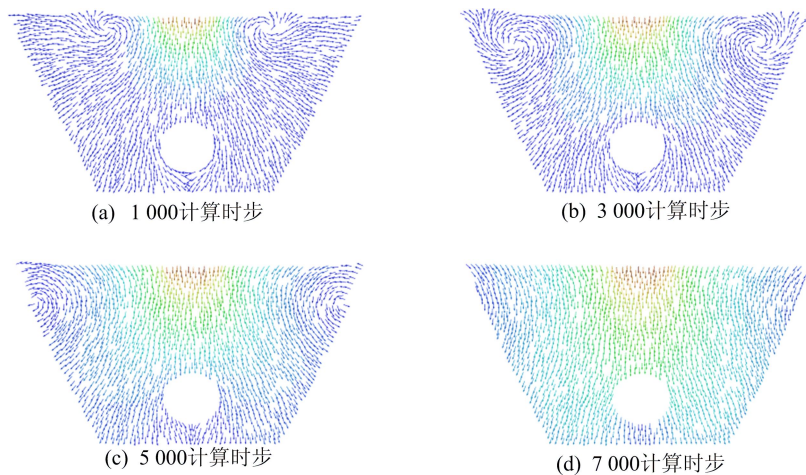


图 9 固定荷载作用下不同计算时步的管周土体位移矢量图

## 4 结 论

本文基于离散-连续界面耦合法建立了三维 PFC-FLAC 耦合理地管道数值模型,对埋地管道受荷载作用下管周土体及管道的受力变形全过程进行了模拟,得到主要结论如下:

(1) 在不同荷载作用下,体位“U”形分布,即中间大、两侧小。外部荷载的大小和管道埋深对土压力的分布规律有影响,产生“压力拱效应”,引起管周土压力重分布,使竖直土压力最大值出现在管肩处。

(2) 荷载作用过程中,管周土体的接触力链向两侧斜下方延展,这表明管道两侧回填土及原状土基在受荷过程中能够承担一部分土体自重和

外部荷载。管周土体的接触力链分布形态与管顶土压力的分布规律相互印证。

(3) 通过模型水平向位移图、管周土体的接触力链网络和位移矢量图讨论了埋地管道的受荷作用动态全过程,并有效揭示了管道变形与细观土颗粒受力位移运动之间的联系以及管周土体的承载传力机制。

### [参 考 文 献]

- [1] 李志龙. 车辆荷载引起的埋地管顶竖直压力研究[D]. 北京:中国地质大学(北京),2019.
- [2] 王复明,方宏远,李斌,等. 交通荷载作用下埋地承插口排水管道动力响应分析[J]. 岩土工程学报,2018,40(12):

- 2274-2280.
- [3] 赵龙飞. 交通荷载作用下埋地管道变形特性研究[D]. 郑州:郑州大学,2017.
- [4] 杨辉,王婷,雷铮强,等. 管土接触作用下埋地管道力学分析[J]. 石油矿场机械,2015,44(7):44-47.
- [5] 肖成志,王嘉勇,杨爱克. 静载作用下埋地管道数值模拟及其力学性能分析[J]. 防灾减灾工程学报,2018,38(1):22-29,167.
- [6] ONATE E,ROJEK J. Combination of discrete element and finite element methods for dynamic analysis of geomechanics problems[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering,2004,193(27/28/29):3087-3128.
- [7] 张华,陆阳. 基于有限差分与离散元耦合的支挡结构数值计算方法[J]. 岩土工程学报,2009,31(9):1402-1407.
- [8] 倪小东,朱春明,王媛. 基于三维离散-连续耦合方法的堤防工程渗透变形数值模拟方法[J]. 土木工程学报,2015,48(增刊1):159-165.
- [9] 叶成银,龚维明,周马生,等. 沉桩过程三维离散-连续耦合数值模拟分析研究[J]. 公路,2019,64(4):61-67.
- [10] 谭鑫,胡政博,冯龙健. 软土中碎石桩模型试验的三维离散-连续介质耦合数值模拟[J]. 岩土工程学报,2021,43(2):347-355.
- [11] YIN Z Y,WANG P,ZHANG F. Effect of particle shape on the progressive failure of shield tunnel face in granular soils by coupled FDM-DEM method[J]. Tunnelling and Underground Space Technology,2020,100:103394.
- [12] 傅金阳,谢佳伟,房雅楠,等. EPB 盾构开挖面稳定性的 PFC-FLAC 耦合分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版),2019,47(5):116-121.
- [13] MICHAEL M,VOGEL F,PETERS B. DEM-FEM coupling simulations of the interactions between a tire tread and granular terrain[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2015,289:227-248.
- [14] GUO N,ZHAO J. A coupled FEM/DEM approach for hierarchical multiscale modelling of granular media[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2014,99(11):789-818.
- [15] 肖成志,王嘉勇,何晨曦. 静/动载作用下埋地管道力学性能的试验分析[J]. 地下空间与工程学报,2019,15(3):747-754.
- [16] 常明丰,盛燕萍,牛晓博,等. 沥青混合料颗粒间接触力链及位移场细观分析[J]. 材料导报,2015,29(20):153-156.

(责任编辑 胡亚敏)

**(上接第 87 页)**

- [4] MEREDITH J,GONZALEZ A,HESTER D. Empirical mode decomposition of the acceleration response of a prismatic beam subject to a moving load to identify multiple damage locations[J]. Shock and Vibration,2012,19(5):845-856.
- [5] 单德山,李乔. 基于车致振动的桥梁损伤识别[J]. 西南交通大学学报,2009,44(1):60-65.
- [6] 邑强. 基于车桥耦合振动分析的公路桥梁损伤识别方法研究[D]. 天津:天津大学,2012.
- [7] 鞠炳照. 基于车桥耦合振动的混凝土简支梁桥损伤诊断方法[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2015.
- [8] 毛云霄,王英杰,肖军华,等. 基于过桥车辆响应的遗传算法桥梁损伤识别[J]. 振动测试与诊断,2018,38(4):696-703.
- [9] 盛宏玉. 结构动力学[M]. 2 版. 合肥:合肥工业大学出版社,2007:211-212.
- [10] SIMSEK M,KOCATURK T. Nonlinear dynamic analysis of an eccentrically prestressed damped beam under a concentrated moving harmonic load[J]. Journal of Sound and Vibration,2008,320(1):235-253.
- [11] 肖勇刚,罗素红. 车桥耦合系统的非线性动力分析[J]. 振动与冲击,2007,26(8):104-108.

(责任编辑 闫杏丽)